

N° D'ORDRE :

1794

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. DMITRI RIABOUCHINSKI,

Fondateur et Directeur de l'Institut Aérodynamique de Koutchino.

1.<sup>re</sup> THÈSE. — RECHERCHES D'HYDRODYNAMIQUE.

2.<sup>re</sup> THÈSE. — SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DE CORPS SOLIDES  
DANS UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE.

Soutenues le 1<sup>er</sup> juin 1922 devant la Commission d'Examen.

MM. KOENIGS, *Président.*  
BOREL,  
MONTEL, } *Examineurs.*  
VILLAT,

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1922







Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41550422\\_0015](https://archive.org/details/IA41550422_0015)

N° D'ORDRE :

179

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. DMITRI RIABOUCHINSKI,

Fondateur et Directeur de l'Institut Aérodynamique de Koutchino.

1<sup>re</sup> THÈSE. — RECHERCHES D'HYDRODYNAMIQUE.

2<sup>e</sup> THÈSE. — SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DE CORPS SOLIDES  
DANS UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE.

Soutenues le 1<sup>er</sup> juin 1922 devant la Commission d'Examen.

MM. KOENIGS, *Président.*

BOREL,

MONTEL,

VILLAT,

} *Examineurs.*



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1922

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen..... MOLLIARD, Professeur de Physiologie végétale.  
Doyen honoraire..... P. APPELL.  
Professeurs honoraires. P. PUISEUX, CH. VÉLAIN, BOUSSINESQ et BOUTY.

|                  |                               |                                               |
|------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------|
|                  | PICARD.....                   | Analyse supérieure et Algèbre supérieure.     |
|                  | GASTON BONNIER.....           | Botanique.                                    |
|                  | KÖENIGS.....                  | Mécanique physique et expérimentale.          |
|                  | GOURSAT.....                  | Calcul différentiel et Calcul intégral.       |
|                  | HALLER.....                   | Chimie organique.                             |
|                  | JOANNIS.....                  | Chimie (Enseignement P. C. N.).               |
|                  | JANET.....                    | Électrotechnique générale.                    |
|                  | WALLERANT.....                | Minéralogie.                                  |
|                  | ANDOYER.....                  | Astronomie.                                   |
|                  | PAINLEVÉ.....                 | Mécanique analytique et Mécanique céleste.    |
|                  | HAUG.....                     | Géologie.                                     |
|                  | H. LE CHATELIER.....          | Chimie générale.                              |
|                  | GABRIEL BERTRAND.....         | Chimie biologique.                            |
|                  | M <sup>me</sup> P. CURIE..... | Physique générale et radioactivité.           |
|                  | CAULLERY.....                 | Zoologie (Evolution des êtres organisés).     |
|                  | C. CHABRIÉ.....               | Chimie appliquée.                             |
|                  | G. URBAIN.....                | Chimie minérale.                              |
|                  | ÉMILE BOREL.....              | Physique mathém. et Calcul des probabilités.  |
|                  | MARCHIS.....                  | Aviation.                                     |
|                  | JEAN PERRIN.....              | Chimie physique.                              |
|                  | G. PRUVOT.....                | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.     |
|                  | ABRAHAM.....                  | Physique.                                     |
|                  | CARTAN.....                   | Mécanique rationnelle.                        |
|                  | CL. GUICHARD.....             | Géométrie supérieure.                         |
| Professeurs..... | LEBESGUE.....                 | Application de l'Analyse à la Géométrie.      |
|                  | LAPICQUE.....                 | Physiologie.                                  |
|                  | GENTIL.....                   | Géographie physique.                          |
|                  | VESSIOT.....                  | Théorie des groupes et Calcul des variations. |
|                  | COTTON.....                   | Physique générale.                            |
|                  | DRACH.....                    | Application de l'Analyse à la Géométrie.      |
|                  | C. FABRY.....                 | Physique.                                     |
|                  | CHARLES PÉREZ.....            | Zoologie.                                     |
|                  | LÉON BERTRAND.....            | Géologie appliquée et Géologie régionale.     |
|                  | DANGEARD.....                 | Botanique (Enseignement P. C. N.).            |
|                  | LESPIEAU.....                 | Théories chimiques.                           |
|                  | LEDUC.....                    | Physique théorique et Physique céleste.       |
|                  | MONTEL.....                   | Mathématiques générales.                      |
|                  | MAURAIN.....                  | Physique du globe.                            |
|                  | HEROUARD.....                 | Zoologie.                                     |
|                  | RÉMY PERRIER.....             | Zoologie (Enseignement P. C. N.).             |
|                  | SAGNAC.....                   | Physique théorique et Physique céleste.       |
|                  | RABAUD.....                   | Biologie expérimentale.                       |
|                  | PORTIER.....                  | Physiologie.                                  |
|                  | BLAISE.....                   | Chimie organique.                             |
|                  | PECHARD.....                  | Chimie (Enseignement P. C. N.).               |
|                  | AUGER.....                    | Chimie analytique.                            |
|                  | M. GUICHARD.....              | Chimie minérale.                              |
|                  | GUILLET.....                  | Physique.                                     |
| Secrétaire.....  | D. TOMBECK.                   |                                               |

A

MM. GABRIEL KÖNIGS ET HENRI VILLAT



---

## PREMIÈRE THÈSE

---

# RECHERCHES D'HYDRODYNAMIQUE

---

### INTRODUCTION

Un corps de forme quelconque en translation uniforme dans un fluide parfait indéfini n'éprouve pas de résistance à l'avancement, si le mouvement du fluide, provoqué par celui du corps, reste irrotationnel. Ce théorème, qu'on a coutume de désigner comme paradoxe de d'Alembert, est d'autant plus remarquable que, d'après le théorème de Lagrange, le mouvement est nécessairement irrotationnel si l'on admet que le fluide peut glisser sur la surface du solide, mais non s'en détacher.

On trouve une confirmation partielle de ce résultat dans la résistance extrêmement faible des solides de forme currentiligne (pisciformes) se déplaçant dans la direction de leur axe dans l'air ou dans l'eau. On aime à montrer parfois dans les Laboratoires aérodynamiques de gros modèles de dirigeables et, à côté, des petits disques d'égale résistance; cette comparaison produit toujours une très grande impression, même sur les personnes prévenues.

Dans le cas d'un solide de forme anguleuse, d'un disque par exemple, le paradoxe de d'Alembert est cependant entièrement contredit par

l'expérience. Cette contradiction est due à l'impossibilité de satisfaire à la condition pour la pression de rester positive dans tout le domaine occupé par le fluide si l'on admet la continuité des vitesses. Chaque fois que le fluide contourne un angle vif, la vitesse devient infinie; si l'angle est quelque peu arrondi la vitesse est finie, mais très grande comparativement aux vitesses en des points dont la distance de la paroi est grande par rapport au rayon de courbure de la paroi. Les pressions doivent être, par conséquent, très grandes, ou même infinies, dans l'éloignement des parois, pour que la pression ne devienne pas négative près des angles. Si la pression tendait à devenir négative une cavitation commencerait à se creuser dans le fluide.

Helmholtz <sup>(1)</sup> reconnut que le problème du contournement d'un obstacle par un fluide admettait une autre solution, compatible avec la condition des pressions, dans laquelle la vitesse est discontinue sur certaines surfaces et résolut un premier exemple de ce genre.

On observe fréquemment des surfaces de discontinuité dans les fluides réels. L'air chargé de fumée qui s'échappe d'un orifice, par exemple, ne s'épanouit pas aussitôt, mais conserve quelque temps une forme cylindrique.

Le problème des mouvements discontinus fut ensuite étudié par Kirchhoff <sup>(2)</sup> qui développa une méthode générale pour la solution de pareils problèmes dans le cas où le mouvement est parallèle à un plan fixe et les limites sont composées de segments de droites. Il résolut entièrement plusieurs exemples et, entre autres, celui de la résistance d'un plan mince, orthogonal au coura relatif, dans la supposition que les surfaces de glissement prennent naissance sur les deux arêtes du plan et se prolongent ensuite indéfiniment dans le fluide en limitant une plage infinie d'eau morte derrière lui. La vitesse de glissement et la pression de l'eau morte ont les mêmes valeurs qu'à l'infini,

La résistance  $R$  s'exprime par la formule

$$R = 0,44 \rho u_0^2 S$$

---

<sup>(1)</sup> HELMHOLTZ, *Berl. Monatsber.*, 1868, p. 215.

<sup>(2)</sup> KIRCHHOFF, *Vorlesungen über math. Physik*, 1877, p. 290.

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $u_0$  la vitesse relative à l'infini et  $S$  la surface du plan mince. Le coefficient 0,44 est plus petit que le coefficient que donne l'expérience (environ 0,58), ce qui tient à ce que, dans les fluides réels, on observe toujours une dépression considérable derrière l'obstacle.

Une importante modification de la méthode de Kirchhoff est due à M. Planck, N. E. Joukowski, J. H. Mitchel et A. E. H. Love <sup>(1)</sup>. Elle permit aux trois derniers de ces auteurs de trouver la solution de nombreux exemples. Cette modification consiste dans la recherche de la représentation conforme des domaines des plans  $\log \zeta \left( \zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{q} e^{i\theta} \right)$  et  $\omega (= \varphi + i\psi)$  l'un sur l'autre, et non pas des plans  $\zeta$  et  $\omega$  selon la méthode primitive. Les parois des obstacles étant composées de segments de droites, les contours des deux domaines sont également limités par des lignes droites et l'on effectue aussitôt la représentation conforme cherchée, en utilisant le demi-plan d'une variable auxiliaire  $t$ , par la méthode de Schwarz et Christoffel <sup>(2)</sup>. Les problèmes sont ainsi ramenés à des intégrales de fonctions algébriques.

Le cas où les parois de l'obstacle sont courbes fut étudié par T. Levi-Civita <sup>(3)</sup>, qui indiqua une méthode générale conduisant à la solution de pareils problèmes. La méthode de T. Levi-Civita a été discutée et complétée <sup>(4)</sup> par U. Cisotti, M. Brillouin et H. Villat. H. Villat apporta un perfectionnement important qui permet de trouver sans tâtonnement la solution pour un obstacle dont l'allure est donnée à l'avancé et considéra de nombreux exemples.

Dans les cas de mouvements discontinus considérés jusqu'ici, on admet que les surfaces de glissement s'étendent à l'infini. Nous nous proposons d'étudier quelques autres formes de mouvements d'un liquide autour d'un obstacle, pouvant être utiles à l'explication du phénomène de la résistance des fluides.

---

<sup>(1)</sup> *Encyclopédie des sciences mathématiques*. 18<sup>e</sup> série, t. 4, p. 115.

<sup>(2)</sup> H. LAMB, *Hydrodynamics*. 1916, p. 87.

<sup>(3)</sup> T. LEVI-CIVITA, *Rendiconti Circ. Matem. di Palermo*. t. 23.

<sup>(4)</sup> P. APPELL, *Mécanique rationnelle*. t. 3, 1921, p. 523 (Note de M. H. Villat).

## CHAPITRE PREMIER

### Théorème de l'énergie cinétique minima

Lord Kelvin (<sup>1</sup>), tout en admettant la légitimité de l'application de la théorie de Helmholtz dans le cas d'un jet fluide libre, critique cependant l'application qu'on en fait aux mouvements glissants dans le fluide.

Une plage indéfinie d'eau morte derrière un solide en mouvement implique une énergie cinétique infinie — ceci est déjà une objection sérieuse quant à la possibilité de la naissance de pareils mouvements.

Lord Kelvin insiste aussi sur le fait de l'incompatibilité des mouvements avec formation de surfaces de glissement avec son théorème de l'énergie cinétique minima, d'après lequel l'énergie cinétique du mouvement irrotationnel est moindre que celle de tout autre mouvement compatible avec la même vitesse normale des parois.

Rappelons la démonstration de ce théorème (<sup>2</sup>). Soient  $T$  l'énergie cinétique du mouvement irrotationnel déterminé par le potentiel de vitesse  $\varphi$  et  $T_1$  celle d'un autre mouvement dont les vitesses sont

$$(1) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_0, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_0, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_0.$$

En vertu de l'équation de continuité et de la condition pour le fluide de pouvoir glisser, mais non se détacher des parois,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$

dans tout le domaine occupé par le fluide, et

$$lu_0 + mv_0 + nw_0 = 0$$

sur les parois,  $l, m, n$  exprimant les cosinus directeurs de la normale à un élément de la paroi. En désignant par  $T_0$  l'énergie cinétique du

(<sup>1</sup>) LORD KELVIN, *Nature*, t. 50, 1894, p. 524, 549, 573, 597.

(<sup>2</sup>) LORD KELVIN, *Papers*, t. 4, p. 107; H. LAMB, *Hydrodynamics*, p. 45.

mouvement dont les vitesses sont  $u_0, v_0, w_0$ , on peut écrire

$$T_1 = T + T_0 + \rho \iiint \left( u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

ou, en appliquant la formule de Green,

$$\begin{aligned} T_1 = T + T_0 - \rho \iiint \varphi \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) dx dy dz \\ - \rho \iint \varphi (lu_0 + mv_0 + nw_0) d\sigma \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad T_1 = T + T_0.$$

Cette expression démontre le théorème, car  $T_0$  est essentiellement positif.

Remarquons, cependant, que cette démonstration ne permet pas d'affirmer que l'énergie cinétique d'un mouvement avec formation de surfaces de glissement est plus grande que celle du mouvement sans formation de pareilles surfaces. En effet, en désignant par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les potentiels de vitesse qui définissent le mouvement du fluide dans les deux domaines  $V_1$  et  $V_2$ , partagés par la surface de glissement, on peut poser

$$u_0 = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 - \varphi), \quad v_0 = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 - \varphi), \quad w_0 = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 - \varphi)$$

dans le domaine  $V_1$ , et

$$u_0 = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_2 - \varphi), \quad v_0 = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_2 - \varphi), \quad w_0 = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_2 - \varphi)$$

dans le domaine  $V_2$ . En substituant ces valeurs dans les expressions (1) et en calculant l'énergie cinétique  $T_1$  de tout le fluide, on a

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{1}{2} \rho \iiint_{V_1} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ + \frac{1}{2} \rho \iiint_{V_2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Cette formule ne permet pas de juger si  $T_1$  est  $>$  ou  $<$  que  $T$ , comme la formule (2) autorise à le faire. Nous allons démontrer cependant,

en employant un autre mode de raisonnement, que, dans ce cas aussi,  $T_1 > T$ .

Comparons l'énergie cinétique  $T_1$  du mouvement irrotationnel acyclique d'un liquide indéfini de densité  $\rho$  autour d'un corps solide de volume  $V_1$  (corps A), limité par une surface  $S_1$ , à l'énergie cinétique  $T_2$  du mouvement irrotationnel acyclique d'un liquide indéfini de même densité autour d'un corps de volume  $V_2$  (corps B), limité par une surface  $S_2$ , en supposant que les deux corps se meuvent avec la même vitesse uniforme  $U_0$  de sens  $Ox$ , et que la forme, les dimensions et la position du corps A permettent de le considérer comme une partie du corps B. Démontrons que

$$(3) \quad T_2 + T_0 > T_1,$$

où

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho (V_2 - V_1) U_0^2.$$

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les potentiels de vitesse des mouvements à l'extérieur des corps A et B et

$$(4) \quad \varphi_0 = x U_0.$$

Circonscrivons mentalement une surface  $S_2$  autour du corps A et désignons par  $S_{12}$  la surface qui limite le volume  $(V_2 - V_1)$ , par  $T_{11}$  et  $T_{12}$  l'énergie cinétique du liquide dans l'espace limité par la surface  $S_{12}$  et à l'extérieur de la surface  $S_2$  respectivement

$$(5) \quad T_1 = T_{11} + T_{12}.$$

D'après la formule de Green et l'équation de continuité, on a

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_{12}} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma; & T_{11} &= \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_{12}} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma; \\ T_2 &= \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_2} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} d\sigma; & T_{12} &= \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_2} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} d\sigma; \\ \int \int_{S_{12}} \left( \varphi_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right) d\sigma &= 0; & \int \int_{S_2} \left( \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} \right) d\sigma &= 0, \end{aligned}$$

où la dérivée des  $\varphi$  est prise suivant la normale extérieure de la sur-

face correspondante. On déduit de ces formules que

$$(6) \quad \begin{cases} T_0 = T_{11} + \frac{1}{2} \rho \iint_{S_{12}} (\varphi_0 + \varphi_1) \frac{\partial}{\partial n_1} (\varphi_0 - \varphi_1) d\mathcal{S}, \\ T_2 = T_{12} + \frac{1}{2} \rho \iint_{S_1} (\varphi_2 + \varphi_1) \frac{\partial}{\partial n_1} (\varphi_2 - \varphi_1) d\mathcal{S}. \end{cases}$$

Sur les parois du solide A, on a

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 - \varphi_1) = 0$$

et sur la surface  $S_2$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial n_1} (\varphi_2 - \varphi_1) = - \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 - \varphi_1).$$

Si la surface  $S_2$  se confond partiellement avec la surface  $S_1$ , on peut considérer une surface  $S'_2$  enveloppant complètement le corps A et s'approchant indéfiniment de la surface  $S_2$ .

En additionnant les formules (6) et en tenant compte des expressions (4), (5), (7), (8), on a

$$(9) \quad T_2 + T_0 = T_1 + \frac{1}{2} \rho \iint_{S_1} (U_0 x - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial n} (U_0 x - \varphi_1) d\mathcal{S},$$

$(U_0 x - \varphi_2)$  et  $(U_0 x - \varphi_1)$  sont les potentiels des mouvements ayant à l'infini la vitesse  $U_0$  et entourent respectivement les corps B et A supposés immobiles.

Désignons maintenant par  $S_{11}$  une portion de la surface  $S_2$ , disposée derrière le corps A, en tous les points de laquelle  $\frac{\partial}{\partial n} (U_0 x - \varphi_1) > 0$  et qui est limitée par une courbe  $L_1$  où cette dérivée s'annule. Désignons ensuite par  $T_{11}$  l'énergie cinétique du fluide autour du système  $A_1$ , composé du corps A et de la surface  $S_{11}$ , et par  $\varphi_{11}$  le potentiel qui définit ce mouvement. En appliquant au système  $A_1$  la formule (9), il faut étendre l'intégrale à toute la surface  $S_1$  et aux deux faces  $S_{11}$ . Sur la surface  $S_1$  l'intégrale est évidemment nulle; sur la surface  $S_{11}$  elle est positive, car les valeurs du potentiel  $(U_0 x - \varphi_{11})$  sont plus grandes sur la face où  $\frac{\partial}{\partial n} (U_0 x - \varphi_1) > 0$  que

sur la face où  $\frac{\partial}{\partial n}(U_0 x - \varphi_1) < 0$ . En remarquant que, dans ce cas,  $T_0 = 0$ , on aura  $T_{11} > T_1$ .

Enveloppons le système  $A_1$  par la surface  $S_2$  de façon que  $S_{11}$  se confonde avec la portion qui lui correspond sur cette surface. Nommons  $S_{12}$  une portion de la surface  $S_2$  limitée d'une part par la courbe  $L_1$  et d'autre part par la courbe  $L_2$  le long de laquelle  $\frac{\partial}{\partial n}(U_0 x - \varphi_{11}) = 0$ ; en tous les points de  $S_{12}$  on a  $\frac{\partial}{\partial n}(U_0 x - \varphi_{11}) > 0$ . Désignons par  $T_{12}$  l'énergie cinétique du fluide autour du système  $A_2$ , composé du corps  $A$  et de la surface  $S_{11} + S_{12}$ . En raisonnant comme plus haut, on trouve que  $T_{12} > T_{11}$  et, par conséquent,  $T_{12} > T_1$ .

En continuant ainsi, on trouve pour le système composé du corps  $A$  et de la surface  $S_{11} + S_{12} + \dots + S_{1n}$ , que  $T_{1n} > T_1$ . En faisant croître  $n$  indéfiniment et en passant à la limite, on obtient le système composé du corps  $A$  et de la surface  $S_2$  qui l'enveloppe. La valeur limite de  $T_{1n}$  exprime l'énergie cinétique du fluide qui entoure le corps  $B$  et de celui qui est compris entre les surfaces  $S_2$  et  $S_1$ ; ce dernier sera un repos relatif. Le théorème exprimé par l'inégalité (1) est ainsi démontré.

Si l'on obtient le corps  $B$  en ajoutant au corps  $A$  des surfaces non fermées infiniment minces, il faut poser dans la formule (3),  $T_0 = 0$ , et, par conséquent, dans ce cas, on a simplement

$$T_2 > T_1.$$

Par exemple, l'énergie cinétique qui correspond au mouvement d'une surface de forme quelconque découpée dans un disque est moindre que celle qui correspond au mouvement du disque lui-même.

Le mouvement qui convient à la forme discontinue ne correspond ni à un minimum, ni à un maximum d'énergie cinétique, et ne se distingue du cas général qu'en ce que, sur la surface de glissement  $S_0$ , la vitesse  $q$  est constante (1), mais il résulte de l'inégalité (3) que

---

(1) Si l'on connaît le potentiel des vitesses qui correspond au mouvement d'un solide dont la forme dépend de  $n$  paramètres arbitraires, et si l'on choisit ces paramètres de façon à ce que sur la partie  $S_0$  de la surface du solide la vitesse reste approximativement constante, la surface  $S_0$  peut être considérée, approximativement, comme surface de glissement.

l'énergie cinétique  $T_1$  du mouvement irrotationnel non glissant est moindre que l'énergie cinétique  $T_2 + T_0$  d'un mouvement avec glissement, compatible avec la même vitesse normale des parois.

Ce corollaire devient une vérité évidente lorsque les surfaces de discontinuité se prolongent indéfiniment, car l'énergie cinétique du fluide mort est alors infinie, tandis que l'énergie cinétique du fluide dans un mouvement irrotationnel non glissant, autour d'un corps de dimension finie, est finie.

Nous venons de voir que, dans le mouvement absolu, le mouvement irrotationnel non glissant correspond pour le fluide à l'énergie cinétique minima; dans le mouvement relatif ce mouvement correspond à l'énergie cinétique maxima.

En effet, en désignant l'énergie cinétique du liquide dans le mouvement relatif par  $T_r$ , on a

$$T_r = \frac{1}{2} \rho \iiint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - U_0 \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

Convenons de considérer un volume  $V$  non pas infini, mais suffisamment grand pour qu'on puisse négliger l'énergie cinétique restante dans le mouvement non glissant absolu. En désignant par  $T_a$  l'énergie cinétique du mouvement absolu et par  $T_e$  l'énergie cinétique du mouvement d'entraînement, on a

$$T_a = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

$$T_e = \frac{1}{2} \rho \iiint_V U_0^2 dx dy dz,$$

et, en remarquant que

$$\rho \iiint_V U_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \rho \iiint_V \varphi \frac{\partial U_0}{\partial x} dz = 2 T_a,$$

on trouve

$$T_r = T_e - T_a.$$

Pour une énergie  $T_e$  donnée,  $T_r$  augmente lorsque  $T_a$  diminue.

Le résultat obtenu par M. M. Brillouin (1), que dans le mouvement avec surfaces de glissement indéfinies l'énergie cinétique est moindre que dans le mouvement non glissant correspondant au même obstacle, peut être considéré comme un cas particulier de ce théorème.

Lorsqu'un corps solide est mis brusquement en mouvement dans un liquide, un changement soudain du mouvement du liquide a lieu. En désignant par  $t_1 - t_0$  un intervalle infiniment petit, par

$$p_0 = \int_{t_0}^{t_1} p \, dt$$

la pression impulsive en un point du liquide, par  $u, v, w$  et  $u_0, v_0, w_0$  les composantes de la vitesse aux moments  $t_1$  et  $t_0$  respectivement, et en admettant que les forces extérieures ne varient pas brusquement, on obtient, en multipliant les équations d'Euler par  $dt$  et en les intégrant entre  $t_1$  et  $t_0$ , les équations suivantes données par Lagrange :

$$(11) \quad \begin{cases} \rho(u - u_0) = -\frac{\partial p_0}{\partial x}, \\ \rho(v - v_0) = -\frac{\partial p_0}{\partial y}, \\ \rho(w - w_0) = -\frac{\partial p_0}{\partial z}. \end{cases}$$

Si le fluide est mis en mouvement en partant du repos,  $u_0, v_0, w_0 = 0$ , et, par conséquent, les vitesses dérivent d'un potentiel de vitesse

$$(12) \quad \varphi = -\frac{p_0}{\rho}.$$

Le mouvement qui prend effectivement naissance, si l'on exclut d'abord les mouvements discontinus, possède, par conséquent, d'après le théorème de Lord Kelvin, une énergie cinétique moindre que tout autre mouvement non glissant, compatible avec les mêmes vitesses normales à la paroi. Nous avons vu plus haut que l'énergie

(1) M. BRILLOUIN, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 8<sup>e</sup> série, t. 22, 1911, p. 433.

cinétique des mouvements fluides avec glissement est aussi plus grande que celle du mouvement irrotationnel non glissant, mais pour pouvoir affirmer que c'est le mouvement qui possède la moindre énergie cinétique qui prend effectivement naissance, il reste à démontrer que les mouvements avec glissement ne sauraient naître. Il faut remarquer qu'une surface de glissement n'est pas nécessairement une surface de giration. Dans le cas d'un glissement pur, le théorème de Lagrange ne saurait être simplement invoqué pour démontrer l'impossibilité de la naissance de pareilles surfaces dans un fluide parfait.

M. J. Hadamard (') donne une démonstration de cette impossibilité qui repose sur le fait qu'à chaque instant d'un glissement relatif, le saut d'accélération est normal à la surface, le long de laquelle la discontinuité a lieu. Un glissement ne peut pas se produire, par conséquent, dans une période quelconque du mouvement, s'il n'en existait pas avant cette période.

On peut aussi démontrer l'impossibilité de la naissance instantanée d'un mouvement glissant, en raisonnant comme suit. Considérons une surface  $S$  inflexible et infiniment mince, dont la forme représente celle d'un corps solide avec des surfaces de glissement adjointes. Admettons que cette enveloppe  $S$  contient un liquide de même densité que celui qui l'entoure, et qu'on la mette brusquement en mouvement en lui communiquant une vitesse  $U_0$  de sens  $Ox$ . Le potentiel des vitesses du fluide intérieur est  $\varphi_0 = U_0 x$ , et désignons par  $\varphi$  celui du fluide extérieur. La pression impulsive sur un élément de l'enveloppe  $S$  sera  $\rho(\varphi - U_0 x)d\sigma$ ; pour pouvoir subir cette impulsion sans se déformer, la surface  $S$  doit être rigide et ne saurait, par conséquent, être une surface fluide.

Mais lorsque le corps se meut avec une vitesse uniforme, la partie de l'enveloppe  $S$  qui correspond à la surface de glissement, peut se liquéfier sans modifier le mouvement du fluide, car la vitesse relative, et par conséquent la pression, est constante sur cette surface.

Rien ne s'oppose à la présence de pareilles surfaces de discon-

---

(') J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, 1903, p. 356.

tinuité, mais elles ne sauraient naître dans un fluide parfait.

Parmi tous les mouvements d'un liquide, compatibles avec la forme du corps solide qu'on met brusquement en mouvement, c'est le mouvement dont l'énergie cinétique est minima, qui prend effectivement naissance, si la condition pour la pression de rester partout positive est satisfaite.

## CHAPITRE II

### Sur la résistance d'un plan mince <sup>(1)</sup>

Nous venons de voir dans le Chapitre précédent que les surfaces de glissement ne sauraient naître dans un fluide parfait. On peut admettre cependant l'apparition dans un fluide visqueux d'une couche de tourbillons, plus ou moins fine, séparant l'une de l'autre deux portions du fluide possédant des vitesses sensiblement différentes. Ce sont de pareilles « surfaces de glissement » qu'on observe dans les fluides réels; elles jouissent de propriétés qui les rapprochent des surfaces de discontinuités effectives.

Lorsqu'un plan mince est contraint à rester immobile dans un fluide en mouvement et normal à la direction de ce mouvement, on observe près de ses arêtes la formation d'une surface de glissement qui reste bien dessinée jusqu'à une certaine distance du plan et qui dégénère et s'évanouit ensuite dans un mouvement tourbillonnaire et chaotique.

L'expérience montre aussi que la pression derrière le plan est répartie dans ce cas d'une façon approximativement constante sur toute la surface et est moindre que la pression dans l'éloignement du plan.

La théorie de Kirchhoff (*voir plus haut*, p. 2), en envisageant une surface de glissement qui se prolongerait jusqu'à l'infini, néglige la

---

(<sup>1</sup>) Les résultats de ce Chapitre, sauf quelques développements complémentaires, ont été déjà publiés dans les *Proc. of the London Math. Society*, 2<sup>e</sup> série, vol. XIX, Part. 3 et le *Bull. de l'Inst. Aérod. de Kouichino*, fasc. 6, 1920.

dépression derrière le plan. Cette dépression, en provoquant une augmentation de la vitesse de glissement, doit évidemment modifier la répartition des vitesses sur la face antérieure du plan.

Nous étudierons dans le présent Chapitre le cas où, le mouvement du fluide étant supposé parallèle à un plan fixe, deux plans seraient disposés l'un derrière l'autre, orthogonalement au courant, et leurs arêtes réunies par des surfaces de glissement (*voir* la figure 1 de la planche III). La vitesse de glissement est dans ce cas, comme nous le démontrons plus loin, plus considérable que la vitesse du courant. Les deux plans s'attirent mutuellement, mais la pression totale du fluide sur le système des deux plans est évidemment nulle.

Le cas étudié par Kirchhoff, qui peut être considéré comme le cas limite où les deux plans seraient infiniment éloignés l'un de l'autre, ne saurait être, par conséquent, opposé au paradoxe de d'Alembert.

Dans les fluides réels, on peut faire correspondre au second plan un plan fictif représentant l'effet global du frottement et des chocs qui, en provoquant une dissipation d'énergie, déterminent la résistance des fluides réels.

En empruntant à l'expérience un seul élément, par exemple l'intensité de la dépression derrière le plan, on peut calculer ensuite la distribution des vitesses sur la face antérieure et la pression totale exercée par le courant sur le plan. La figure 8 montre la distance qui doit exister entre les deux plans, pour qu'ils soient attirés mutuellement avec une force approximativement égale à celle qu'exerce un courant fluide réel sur un plan mince.

Nous suivrons dans notre démonstration la marche que nous avons déjà indiquée antérieurement <sup>(1)</sup>, mais nous exposerons d'abord les considérations qui nous ont conduit à cette méthode.

Rappelons la méthode qu'on emploie <sup>(2)</sup> pour résoudre le problème de Kirchhoff du mouvement d'un liquide autour d'un plan mince avec surfaces de glissement adjointes indéfinies. On repré-

---

(1) *loc. cit.*, *ante*, p. 12.

(2) H. LAMB, *Hydrodynamics*, p. 92.

sente (voir la planche I), les plans des variables  $z(=x+iy)$ ,  $w(=\varphi+i\psi)$ ,  $\zeta(=\frac{dz}{dw}=\frac{1}{q}e^{\theta i})$ ,  $\log \zeta$ , et l'on effectue ensuite la représentation conforme des domaines des plans  $w$  et  $\log \zeta$  l'un sur l'autre.

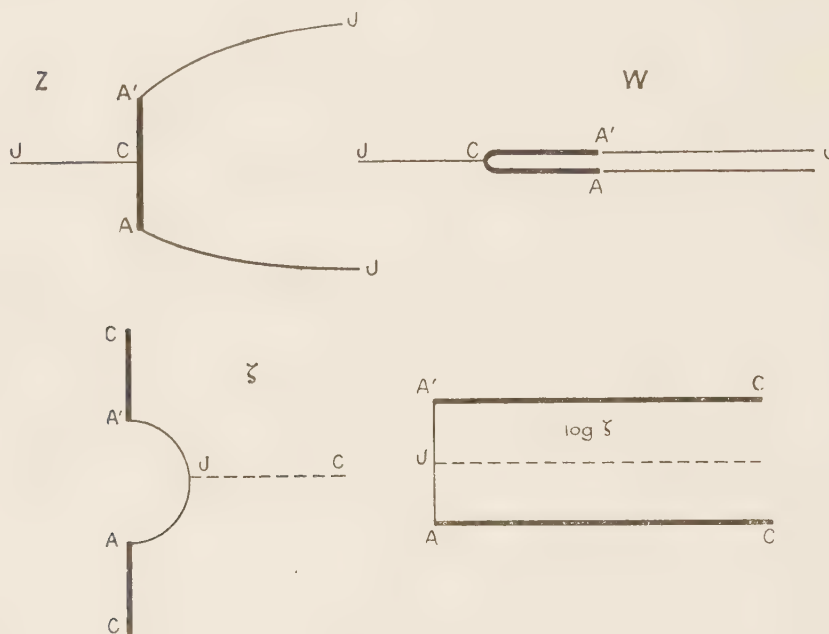


Planche I.

Si l'on applique cette méthode au cas que nous nous proposons d'étudier du mouvement d'un liquide autour de deux plans disposés l'un derrière l'autre, orthogonalement au courant avec des surfaces de glissement réunissant leurs arêtes, on obtient comme plans des variables,  $z$ ,  $w$ ,  $\zeta$  et  $\log \zeta$  les figures représentées dans la planche II. On se heurte ainsi à la difficulté qui provient de ce que les domaines des demi-plans supérieur et inférieur du plan  $z$  se superposent en s'entrecroisant sur les plans  $\zeta$  et  $\log \zeta$ .

Si l'on veut considérer l'un des demi-plans symétriques du plan  $z$  pour étendre ensuite le résultat obtenu à tout le plan on rencontre une nouvelle difficulté lorsqu'on tache de préciser le sens de l'expression « demi-plan symétrique ».

En effet, si l'on attribue les points disposés sur la droite  $KCC'K$  du plan de la variable  $z$  au demi-plan supérieur, ce dernier ne

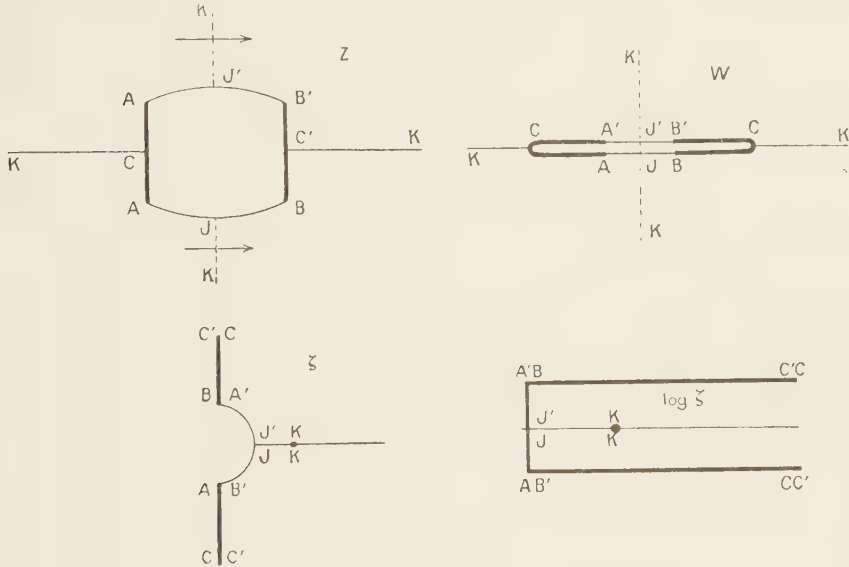


Planche II.

pourra pas être considéré comme un demi-plan parfaitement symétrique, car les points de la droite  $KCC'K$  ne figureront pas dans le demi-plan restant. On ne peut pas ne pas tenir compte de cette circonstance lorsqu'on a recours à la représentation conforme : on peut se représenter facilement une transformation ponctuelle qui ferait correspondre, par exemple, à une partie des points de l'axe  $KCC'K$ , disposés d'une façon symétrique par rapport à l'origine, des points disposés sur l'axe imaginaire du plan transformé et l'on n'aperçoit pas les motifs qui obligeraient à les attribuer seulement à l'un des demi-plans transformés.

C'est pour surmonter ces difficultés que nous employons la méthode exposée plus bas.

Désignons par  $z'$  et  $w'$  les variables complexes  $x + iy$  et  $\varphi + i\psi$ . Les plans de ces variables sont représentés dans les figures 1 et 2 de la planche III. Les points correspondants sont exprimés par les mêmes lettres.

Faisons les conventions suivantes. Désignons la partie KCAIBC' de la ligne de courant  $\psi = 0$  par  $\psi = -0$  et la partie CA'I'BC'K' par  $\psi = +0$ ; admettons ensuite que  $\left(\frac{\psi}{|\psi|}\right)_{\psi=+0} = 1$  et  $\left(\frac{\psi}{|\psi|}\right)_{\psi=-0} = -1$ .

Ces conventions faites, considérons les demi-plans (voir les figures 3 et 4) des variables complexes

$$z = x + i|y| = x + i \frac{\psi}{|\psi|} y,$$

$$w = \varphi + i|\psi| = \varphi + i \frac{\psi}{|\psi|} \psi.$$

Il est facile de voir qu'on peut interpréter ces demi-plans comme exprimant les plans des variables  $z'$  et  $w'$  pliés en deux.

Nous devons trouver la relation de dépendance qui existe entre les variables  $z'$  et  $w'$  :

$$(1) \quad z' = F(w')$$

pour pouvoir déterminer ensuite, en mettant  $F(w')$  sous la forme

$$F(w') = P(\varphi, \psi) + iQ(\varphi, \psi)$$

les fonctions

$$x = P(\varphi, \psi),$$

$$y = Q(\varphi, \psi).$$

En remarquant que,  $n$  étant un nombre entier quelconque,

$$\left(i \frac{\psi}{|\psi|}\right)^{in} = 1,$$

$$\left(i \frac{\psi}{|\psi|}\right)^{in+1} = i \frac{\psi}{|\psi|},$$

$$\left(i \frac{\psi}{|\psi|}\right)^{in+2} = -1,$$

$$\left(i \frac{\psi}{|\psi|}\right)^{in+3} = -i \frac{\psi}{|\psi|},$$

on peut écrire

$$x + i \frac{\psi}{|\psi|} y = P(\varphi, \psi) + i \frac{\psi}{|\psi|} Q(\varphi, \psi) = F\left(\varphi + i \frac{\psi}{|\psi|} \psi\right)$$

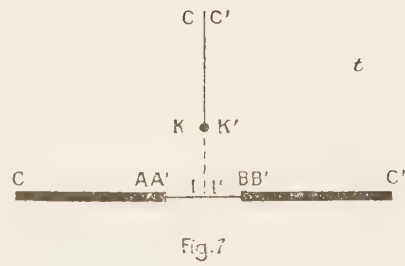
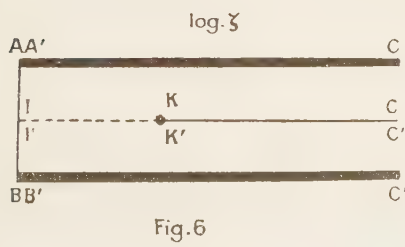
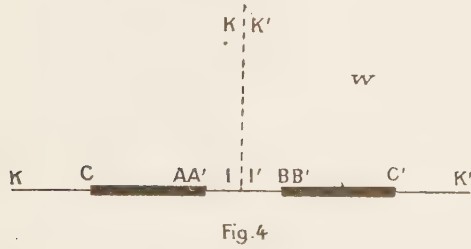
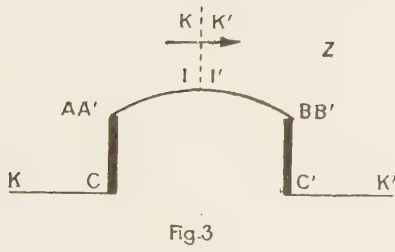
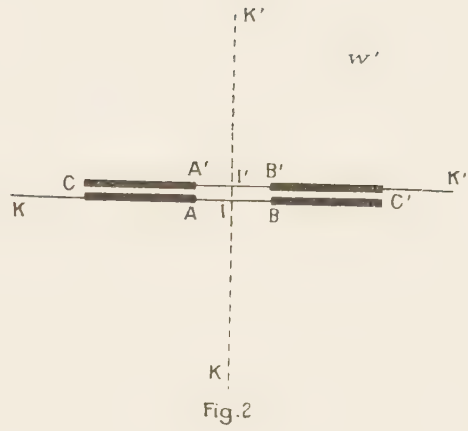
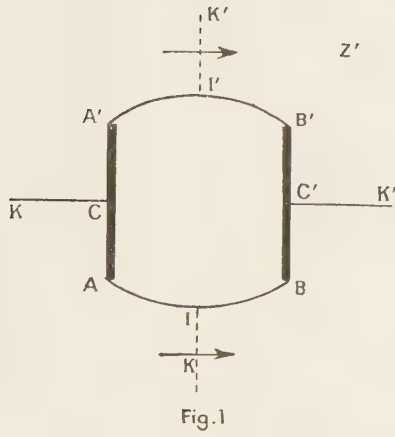


Planche III.

et, par conséquent,

$$(2) \quad z = F(\omega).$$

Inversement, si l'on trouve une expression de la forme (2), il suffira, pour passer à la formule (1), de remplacer  $\frac{\psi}{|\psi|}$  par l'unité.

On peut appliquer aux variables complexes

$$x + i \frac{\psi}{|\psi|} y \quad \text{et} \quad \varphi + i \frac{\psi}{|\psi|} \psi$$

les règles ordinaires de la théorie des fonctions d'une variable complexe, mais on aura soin de toujours remplacer  $\sqrt{-1}$  par  $i \frac{\psi}{|\psi|}$ .

Dans la représentation géométrique de ces nombres complexes, leurs coordonnées seront la partie réelle et le coefficient de  $i$ .

On peut écrire, par exemple, en employant les notations usuelles <sup>(1)</sup>,

$$\zeta = q_1 \frac{dz}{d\omega} = \frac{q_1}{u - i \frac{\psi}{|\psi|} v} = \frac{q_1}{q} \left( \frac{u}{q} + i \frac{\psi}{|\psi|} \frac{v}{q} \right) = \frac{q_1}{q} i^{\frac{|\psi|}{\psi} \theta},$$

$$\log \zeta = \log \frac{q_1}{q} + i \frac{\psi}{|\psi|} \theta.$$

comme il est facile de le vérifier directement.

Les contours des aires qui correspondent sur les demi-plans des variables  $\zeta$  et  $\log \zeta$  à celle du demi-plan de la variable  $\omega$  sont indiqués dans les figures 5 et 6.

En employant la méthode de Schwarz et Christoffel, représentons l'aire indiquée dans la figure 6 sur le demi-plan de la variable auxiliaire  $t$  (voir la figure 7).

Posons

$$\log \zeta = M \operatorname{arc} \operatorname{ch} t + N$$

ou

$$t = \operatorname{ch} \left( \frac{\log \zeta - N}{M} \right).$$

(<sup>1</sup>) J'emploie les notations adoptées dans l'*Hydrodynamique* de M. H. Lamb, mais je conserve le signe primitif du potentiel des vitesses et je désigne la vitesse de glissement par  $q_1$ .

Pour calculer les valeurs de M et N, admettons que les points (A, A') et (B, B'), pour lesquels respectivement,

$$\log \zeta = i \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \log \zeta = -i \frac{\pi}{2},$$

correspondent sur le demi-plan de la variable  $t$  aux points  $t = -1$  et  $t = +1$ . On trouve ainsi que

$$N = -i \frac{\pi}{2}, \quad M = 1.$$

Donc

$$(3) \quad t = \operatorname{ch} \left( \log \zeta + i \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} i \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right).$$

Sur la surface de glissement,  $\frac{q_1}{q} = 1$  et, par conséquent,

$$(4) \quad t = -\sin \theta \frac{\psi}{|\psi|}.$$

Il est facile de vérifier que, pour représenter le demi-plan  $w$  sur le demi-plan  $t$ , de façon que les points correspondants coïncident, on peut poser

$$(5) \quad t = \frac{\operatorname{tang} \alpha \cdot w}{\sqrt{q_1^2 b^2 - w^2}}$$

ou

$$(6) \quad w = \frac{q_1 b t}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \alpha + t^2}}.$$

La constante  $\operatorname{tang} \alpha$  est de dimension zéro; elle détermine le rapport de la largeur  $l$  des plans à la distance  $d$  qui les sépare. La constante  $b$  détermine l'unité de longueur et la constante  $q_1$  l'unité de vitesse.

En égalisant les secondes parties des expressions (3) et (5), en remplaçant  $\zeta$  par  $q_1 \frac{dz}{dw}$ , en intégrant et en remplaçant  $\frac{\psi}{|\psi|}$  par l'unité, on trouve la relation cherchée entre les variables  $w'$  et  $z'$ .

On peut aussi obtenir facilement l'équation de la courbe de glissement en utilisant le raisonnement qu'on applique ordinairement

dans ces cas. Sur la courbe de glissement, on a  $\frac{d\varphi}{ds} = q$ , et, par conséquent, en mesurant la longueur de l'arc  $s$ , du point I, on peut poser  $\varphi = q, s$ . En substituant cette valeur de  $\varphi$  dans l'équation (6), en posant  $\psi = 0$  et en prenant en considération la formule (4), on obtient comme équation intrinsèque de la courbe cherchée

$$s = - \frac{b \sin \theta}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \sin^2 \theta}}$$

et en intégrant les expressions

$$dx = \cos \theta ds,$$

$$dy = \sin \theta ds,$$

on trouve

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{x}{b} = -\frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \sin^2 \theta}} \\ \quad + \frac{\theta}{|\theta|} \left[ \sec \alpha E\left(\cos \alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right) \right. \\ \quad \left. - \sec \alpha \sin^2 \alpha F\left(\cos \alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right) - \frac{d}{2b} \right], \\ \frac{y}{b} = \frac{\tan^2 \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \sin^2 \theta}} - \frac{\tan^2 \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} + \frac{l}{2b}. \end{cases}$$

L'angle  $\theta$  varie de  $+\frac{\pi}{2}$  à  $-\frac{\pi}{2}$ . Les fonctions

$$F\left(\cos \alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right) \quad \text{et} \quad E\left(\cos \alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right)$$

sont des intégrales elliptiques de Legendre de première et seconde espèces

$$F\left(\cos \alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - |\theta|} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}}$$

$$E\left(\cos \alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - |\theta|} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi} d\varphi$$

et

$$(8) \quad \frac{d}{2b} = \sec \alpha (E' - \sin^2 \alpha K'),$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}} \\ \mathbf{E}' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

sont des intégrales complètes complémentaires.

Pour calculer la relation de dépendance entre  $\frac{l}{2b}$  et  $\alpha$ , remarquons d'abord que le long de CA' (voir la figure 5)  $\zeta = \frac{q_1}{q}i$  et, par conséquent, en faisant cette substitution dans la formule (3), on a

$$t = -\frac{1}{2} \left( \frac{q_1}{q} + \frac{q}{q_1} \right)$$

ou

$$\frac{q}{q_1} = -t - \sqrt{t^2 - 1}.$$

Devant le radical nous prenons le signe  $-$ , pour que  $q$  s'annule lorsqu'on pose  $t = -\infty$ . En intégrant maintenant le long de CA' (voir la figure 3), on peut écrire

$$l = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} dy = 2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = -2b \int_{-\infty}^{-1} \frac{(t - \sqrt{t^2 - 1}) \tan^2 \alpha dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et, en effectuant le calcul, on trouve

$$(9) \quad \frac{l}{2b} = \sec \alpha (\sin^2 \alpha + \mathbf{E} - \cos^2 \alpha \mathbf{K}),$$

où E et K sont des intégrales elliptiques complètes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ \mathbf{K} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

L'ordonnée  $\gamma$  de la courbe de glissement est maximée lorsqu'on pose  $\theta = 0$ . En désignant cette ordonnée par  $\frac{l'}{2}$ , on déduit des for-

mules (7) et (9) que

$$(10) \quad \frac{l' - l}{l} = \frac{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha + E - \cos^2 \alpha K}.$$

Calculons maintenant le rapport de la vitesse  $q_1$  à la vitesse à l'infini  $q_0$  en fonction du paramètre  $\alpha$ .

En posant, dans l'expression (5),  $\psi = -0$ ,  $\varphi = -\infty$  ou  $\psi = +0$ ,  $\varphi = +\infty$ , nous trouvons

$$l = i \tan \alpha.$$

En faisant cette substitution dans la formule (3) et en remarquant qu'à l'infini  $\theta = 0$  et  $\zeta = \frac{q_1}{q_0}$ , on trouve

$$(11) \quad \frac{q_1}{q_0} = \tan \alpha + \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}.$$

Devant le radical il faut prendre le signe +, le rapport  $\frac{q_1}{q}$  étant positif.

Calculons aussi le coefficient de la dépression derrière le plan. On a

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho q_0^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho q_1^2.$$

Donc

$$(12) \quad \frac{p_0 - p_1}{\rho q_0^2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Pour calculer la pression totale du courant sur le plan, posons

$$P = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} (p - p_1) dy = \rho q_1^2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{q^2}{q_1^2}\right) dy.$$

En prenant en considération les formules

$$\left(\frac{q}{q_1}\right)^2 = -\left(1 + 2t \frac{q}{q_1}\right),$$

$$l = \frac{\tan \alpha \cdot \varphi}{\sqrt{q_1^2 b^2 - \varphi^2}},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{q},$$

et en intégrant le long de AC' (voir la figure 3), nous obtenons

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{\mathbf{P}}{\rho q_0^2 l} &= \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \left( 1 + \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{-1} 2 t \frac{q}{q_1} \frac{d\gamma}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt \right) \\ &= \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \left( 1 - 2 \sin \alpha \operatorname{tang} \alpha \frac{b}{l} \right) \\ &= \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \frac{\mathbf{E} - \cos^2 \alpha \mathbf{K}}{\sin^2 \alpha + \mathbf{E} - \cos^2 \alpha \mathbf{K}}. \end{aligned}$$

Calculons la valeur limite du rapport  $\frac{\mathbf{P}}{\rho q_0^2 l}$  pour  $\alpha = 0$ . En remarquant que

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \alpha + \left( \frac{1.3}{2.4} \right)^2 \sin^4 \alpha + \dots \right], \\ \mathbf{E} &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \alpha - \left( \frac{1.3}{2.4} \right)^2 \frac{\sin^4 \alpha}{3} - \dots \right], \end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\mathbf{E} - \cos^2 \alpha \mathbf{K}}{\sin^2 \alpha} = \frac{\pi}{4},$$

et, par conséquent [voir la formule (9)],

$$\lim_{\alpha=0} \frac{l}{2b \sin^2 \alpha} = \frac{\pi + 4}{4}$$

et

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\mathbf{P}}{\rho q_0^2 l} = \frac{\pi}{\pi + 4}.$$

Ce coefficient coïncide avec celui de Kirchhoff. Il correspond à la valeur nulle du paramètre  $\alpha$ , qui détermine un éloignement mutuel infini des plans. Démontrons-le.

Les formules (8) et (9) donnent

$$(14) \quad \frac{d}{l} = \frac{\mathbf{E} - \sin^2 \alpha \mathbf{K}'}{\sin^2 \alpha + \mathbf{E} - \cos^2 \alpha \mathbf{K}}.$$

Lorsque  $\alpha$  est suffisamment petit, on peut écrire, en omettant les membres d'un ordre inférieur,

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \mathbf{E} - \cos^2 \alpha \mathbf{K} &= \frac{\pi + 4}{4} \sin^2 \alpha, \\ \mathbf{E} - \mathbf{K} &= -\frac{\pi}{4} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

De la dernière de ces expressions et de la relation de Legendre <sup>(1)</sup>,

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2},$$

il résulte que

$$(15) \quad \lim_{\alpha=0} \sin^2 \alpha K' = 0,$$

tandis que la valeur de E' pour  $\alpha = 0$  est égale à l'unité.

Donc effectivement

$$(16) \quad \lim_{\alpha=0} \frac{d}{l} = \infty,$$

Considérons le second cas limite lorsque les deux plans se rapprochent indéfiniment.

Remarquons d'abord qu'en posant dans la formule (15)  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha'$ , on obtient

$$\lim_{\alpha'=\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha' K = 0.$$

Il résulte de cette remarque et des formules (13) et (14) que

$$\lim_{\alpha=\frac{\pi}{2}} \frac{P}{\rho q_0^2 l} = \infty,$$

$$\lim_{\alpha=\frac{\pi}{2}} \frac{d}{l} = 0.$$

Remarquons aussi que pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\alpha=\frac{\pi}{2}} \left( \frac{P}{\rho q_0^2 l} : \frac{p_0 - p_1}{\rho q_0^2} \right) = 1.$$

Dans le Tableau ci-joint nous avons calculé pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  les valeurs correspondantes du rapport  $\frac{d}{l}$  d'après la formule (24), du rapport  $\frac{l' - l}{l}$  d'après la formule (10), du

---

(1) *Exercices de calcul intégral*, t. 1, Paris, 1811, p. 61.

rapport  $\frac{q_1}{q_0}$  d'après la formule (11) des coefficients  $\frac{P}{\rho q_0^2 l}$  et  $\frac{P_0 - P_1}{\rho q_0^2}$  d'après les formules (13) et (12).

TABLEAU I.

| $\alpha^\circ$ . | $\frac{h}{l}$ . | $\frac{l' - l}{l}$ . | $\frac{q_1}{q_0}$ . | $\frac{P}{\rho q_0^2 l}$ . | $\frac{P_0 - P_1}{\rho q_0^2}$ . |
|------------------|-----------------|----------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------------|
| 0.....           | $\infty$        | $\infty$             | 1,00                | 0,44                       | 0                                |
| 10.....          | 17,58           | 2,660                | 1,19                | 0,62                       | 0,21                             |
| 20.....          | 3,958           | 1,082                | 1,43                | 0,90                       | 0,52                             |
| 30.....          | 1,490           | 0,555                | 1,73                | 1,33                       | 1,00                             |
| 40.....          | 0,668           | 0,307                | 2,13                | 2,07                       | 1,80                             |
| 50.....          | 0,314           | 0,164                | 2,75                | 3,51                       | 3,27                             |
| 60.....          | 0,141           | 0,082                | 3,73                | 6,61                       | 6,46                             |
| 70.....          | 0,054           | 0,033                | 5,68                | 15,6                       | 15,6                             |
| 80.....          | 0,012           | 0,008                | 11,4                | 64,4                       | 64,8                             |
| 90.....          | 0               | 0                    | $\infty$            | $\infty$                   | $\infty$                         |

A la valeur du paramètre  $\alpha = 10^\circ$  correspond un rapport

$$\frac{l(P_0 - P_1)}{P} = 0,339$$

Un rapport approximativement pareil existe entre les coefficients de la dépression et de la résistance totale pour un plan mince maintenu orthogonalement dans un fluide en mouvement. Nous avons calculé

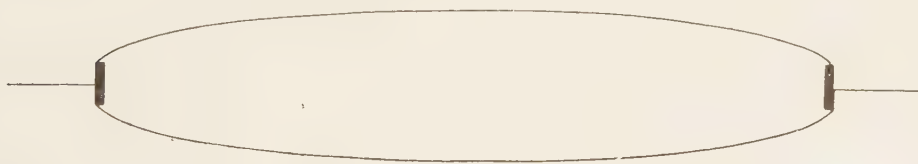


Fig. 8.

en posant dans la formule (7)  $\alpha = 10^\circ$ , les coordonnées de la courbe de glissement correspondante. Cette courbe est représentée dans la figure 8.

Considérons aussi le cas où, la distance  $d$  entre les plans restant finie, leur largeur  $l$  diminue indéfiniment. En éliminant  $l$  des formules (10) et (14), on a

$$\frac{l'}{d} = \frac{\sin \alpha + E - \cos^2 \alpha K}{E' - \sin^2 \alpha K'}$$

et, par conséquent,

$$(17) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{l'}{d} = 0.$$

Comme nous avons admis que  $d$  est fini, il résulte des expressions (16) et (17) que  $l'$  s'annule en même temps que  $l$ , mais le rapport  $\frac{l' - l}{l}$  reste infini.

### CHAPITRE III

#### Inertie additive dans les mouvements avec et sans glissements

Nous comparerons, dans ce Chapitre, l'inertie additive, rapportée à l'unité de longueur d'un cylindre, de section rectangle, qui se meut, dans un liquide en repos à l'infini, orthogonalement aux génératrices, avec une vitesse  $-q_0$ , en supposant d'abord qu'il ne se forme pas de surfaces de glissement sur les côtés parallèles au mouvement et ensuite — que de pareilles surfaces de glissement existent <sup>(1)</sup> (voir la planche IV). Les plans des variables  $\omega$ ,  $\zeta$  et de la variable auxiliaires  $t$  qui correspondent, dans le mouvement relatif, au premier cas sont aussi représentés sur cette planche.

On établit la correspondance entre les plans des variables  $\omega$ ,  $\zeta$  ( $= i q_1 \frac{dz}{dw}$ ) et  $t$ , en posant.

$$\zeta = i \sqrt{1 - t^2},$$

$$\omega = \frac{q_0 b t}{\sqrt{\tan^2 \alpha + t^2}}.$$

Nous désignons par  $q_0$  la vitesse du courant relatif à l'infini, par  $q_1$  sa vitesse aux points I<sub>1</sub>, I, par  $b$  et  $\tan \alpha$ , deux constantes qu'il reste à exprimer en fonction des dimensions de la section du cylindre.

---

(1) *Sur la résistance des fluides*. Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens, Strashourg 1920.

Lorsque  $\omega = \infty$ , on a  $t = -i \tan \alpha$ ,  $q = q_0$ ,  $\theta = 0$ , et, par conséquent,

$$(1) \quad \frac{q_0}{q_1} = \cos \alpha.$$

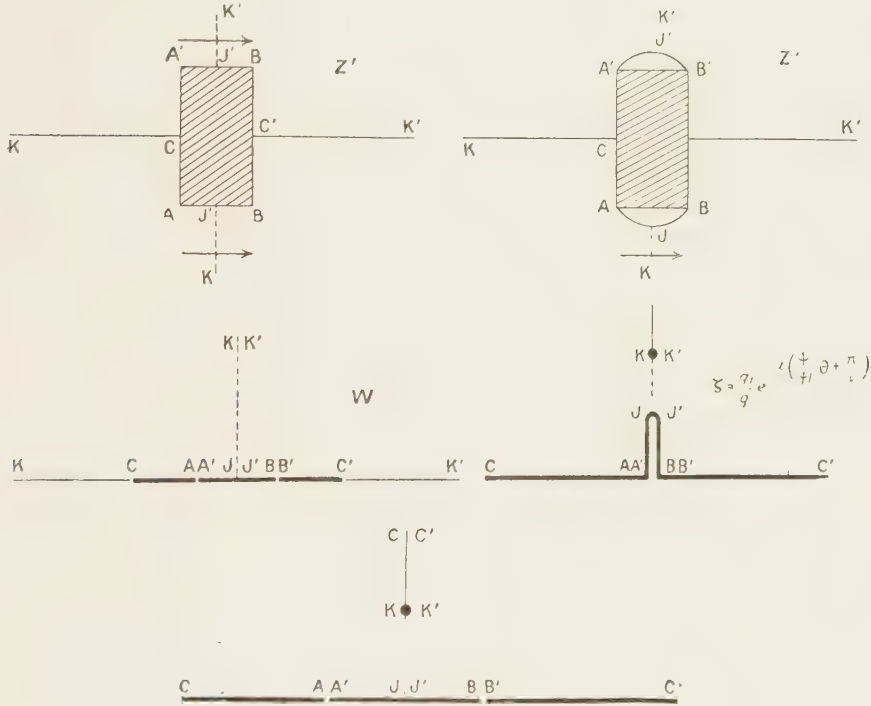


Planche IV.

En désignant par  $l$  la largeur et par  $d$  l'épaisseur du cylindre, on trouve que

$$\frac{l}{2} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = b \tan^2 \alpha \cos \alpha \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{t^2 - 1} dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^{\frac{3}{2}}} = b (E - \cos^2 \alpha K),$$

$$\frac{d}{2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = b \tan^2 \alpha \cos \alpha \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1 - t^2} dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^{\frac{3}{2}}} = b (E' - \sin^2 \alpha K').$$

$$(2) \quad \frac{d}{l} = \frac{E' - \sin^2 \alpha K'}{E - \cos^2 \alpha K},$$

où E, K sont des intégrales elliptiques complètes, E', K', les intégrales complémentaires et  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ , leurs modules.

Nous calculerons l'énergie cinétique T du fluide autour du cylindre en mouvement et l'inertie additive M en utilisant les formules

$$(3) \quad \begin{aligned} 2T &= -\rho q_0^2 \left( \frac{1}{q_0} \int \varphi dy + S \right) = M q_0^2, \\ M &= -\rho \left( \frac{1}{q_0} \int \varphi dy + S \right), \end{aligned}$$

où  $\varphi$  est le potentiel des vitesses dans le mouvement relatif, S la section du cylindre et l'intégrale est prise le long du contour de cette section dans le sens négatif.

Le long des côtés parallèles au mouvement, l'intégrale s'annule et, par conséquent,

$$M = -\rho \left( \frac{4}{q_0} \int_{-\infty}^{-1} \varphi \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt + S \right),$$

et comme le long de CA'

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q_0 b t}{\sqrt{\tan^2 \alpha + t^2}}, \\ \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{1}{q} = -\frac{i}{q_1} \sqrt{1-t^2}, \end{aligned}$$

on a

$$M = \rho \left( 4 b^2 \tan^2 \alpha \cos \alpha \int_{-\infty}^{-1} \frac{t \sqrt{1-t^2} dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^2} + S \right) = \rho (\pi b^2 \sin^2 \alpha - S)$$

ou, en éliminant  $b$ ,

$$M = \rho \left( \frac{\pi l^2 \sin^2 \alpha}{4(E - \cos^2 \alpha K)^2} - S \right).$$

Lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{d}{l} = 0$ , le cylindre devient un plan mince. En désignant l'inertie additive correspondante par  $M_0$ ,

$$M_0 = \rho \pi \left( \frac{l}{2} \right)^2,$$

on peut écrire

$$(4) \quad \frac{M}{M_0} = \frac{\sin^2 \alpha}{(E - \cos^2 \alpha K)^2} - \frac{4}{\pi} \frac{d}{l}.$$

Dans le Tableau II, nous avons calculé pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  les valeurs correspondantes du rapport  $\frac{d}{l}$  d'après la formule (2) du rapport  $\frac{M}{M_0}$  d'après la formule (4) et du rapport  $\frac{q_1}{q_0}$  d'après la formule (1).

TABLEAU II.

| $\alpha^\circ$ . | $\frac{d}{l}$ . | $\frac{M}{M_0}$ . | $\frac{q_1}{q_0}$ . |
|------------------|-----------------|-------------------|---------------------|
| 90.....          | 0               | 1,00              | 0                   |
| 80.....          | 0,025           | 1,05              | 0,178               |
| 70.....          | 0,111           | 1,16              | 0,342               |
| 60.....          | 0,298           | 1,29              | 0,500               |
| 50.....          | 0,676           | 1,42              | 0,643               |
| 40.....          | 1,478           | 1,65              | 0,766               |
| 30.....          | 3,355           | 2,00              | 0,866               |
| 20.....          | 9,007           | 2,50              | 0,940               |
| 10.....          | 40,03           | 3,50              | 0,985               |
| 0.....           | $\infty$        | —                 | 1                   |

Sur les côtés A'B' et AB (voir la première figure de la planche IV) on a  $\theta = 0$  et  $t$  parcourt toutes les valeurs de  $-1$  à  $+1$ ; la vitesse correspondante  $q$  s'exprime comme suit

$$\frac{q}{q_1} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Aux points I et I' elle prend la valeur minima  $q = q_1$  et devient infinie sur les arêtes.

Des surfaces de glissement comme celles qui sont représentées

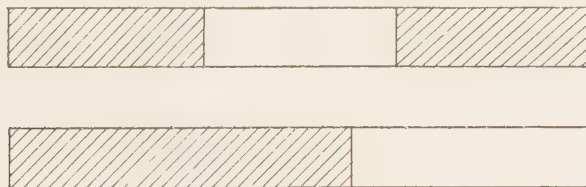


Fig. 9.

dans la figure 9, ne peuvent donc pas exister et ce serait une erreur de dire qu'on peut les tracer *a priori*, sans avoir recours au calcul<sup>(1)</sup>.

(1) LORD KELVIN, *Nature*, t. 50, 1894, p. 597.

Calculons à présent l'inertie additive dans le second cas (deuxième figure de la planche IV), lorsque les surfaces de glissement existent. Nous avons obtenu plus haut la solution du problème du mouvement de deux plans minces, disposés l'un derrière l'autre lorsque leurs arêtes sont réunies par des surfaces de glissement. Il suffit de supposer que l'eau morte du cylindre formé par les plans minces et les plans réunissant leurs arêtes, est remplacée par un corps solide de même forme, pour passer de ce cas à celui que nous proposons d'étudier actuellement. Les formules obtenues dans le Chapitre II peuvent donc être utilisées telles quelles. Le rapport de la vitesse  $q_0$  à l'infini à la vitesse  $q$ , sur la surface du glissement était

$$(5) \quad \frac{q_0}{q_1} = \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}},$$

et le rapport de l'épaisseur à la largeur

$$(6) \quad \frac{d}{l} = \frac{E' - \sin^2 \alpha K'}{\sin^2 \alpha + E - \cos^2 \alpha K}.$$

Le potentiel des vitesses sur la paroi du cylindre et sur les surfaces de glissement s'exprimait par

$$\varphi = \frac{q_1 b t}{\sqrt{\tan^2 \alpha + t^2}}$$

et la vitesse  $q$ , sur le segment CA' (voir la planche III), par

$$\frac{q}{q_1} = -t - \sqrt{t^2 - 1}.$$

sur la ligne de glissement A'I',  $\frac{d\varphi}{ds} = q$ ,  $t = -\sin \theta$ .

Nous calculerons l'énergie cinétique de tout le fluide, y compris celle du fluide inclus entre la surface de glissement et le corps. Il faudra donc poser, dans ce cas aussi, dans la formule (3) de la page 31,  $S = ld$ .

Sur le segment CA'

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi dy &= \int_{-\infty}^{-1} \varphi \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\tan^2 \alpha b^2 q_1 t^2 dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^2} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\tan^2 \alpha b^2 q_1 \sqrt{t^2 - 1} t dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^2}. \end{aligned}$$

sur la ligne de glissement A'I'

$$\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l'}{2}} \varphi dy = \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l'}{2}} \varphi \sin \theta ds = \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l'}{2}} \varphi \sin \theta \frac{d\varphi}{q_1} = - \int_{-1}^0 \frac{\tan^2 \alpha q_1 b^2 t^2 dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^2}$$

et, par conséquent,

$$M = -\rho \left[ 4 \tan^2 \alpha b^2 \frac{q_1}{q_0} \left( \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{t^2 - 1} t dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^2} - \int_{-\infty}^0 \frac{t^2 dt}{(\tan^2 \alpha + t^2)^2} \right) + ld \right].$$

En calculant ces intégrales, on trouve

$$M = \rho \left( \frac{\pi l^2}{4} \frac{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)^2}{(\sin^2 \alpha + E - \cos^2 \alpha K)^2} - ld \right)$$

et, en définitive,

$$(7) \quad \frac{M}{M_0} = \frac{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)^2}{(\sin^2 \alpha + E - \cos^2 \alpha K)^2} - \frac{4}{\pi} \frac{d}{l},$$

où  $M_0 = \rho \pi \left( \frac{l}{2} \right)^2$  exprime, comme dans la formule (4), l'inertie additive du plan mince.

Dans le Tableau III, nous avons calculé les valeurs du rapport  $\frac{d}{l}$ , d'après la formule (6), du rapport  $\frac{M}{M_0}$ , d'après la formule (7) et du rapport  $\frac{q_0}{q_1}$  d'après la formule (5)

TABLEAU III.

| $\alpha^\circ$ . | $\frac{d}{l}$ . | $\frac{M}{M_0}$ . | $\frac{q_0}{q_1}$ . |
|------------------|-----------------|-------------------|---------------------|
| 90.....          | 0               | 1,00              | 0                   |
| 80.....          | 0,012           | 1,08              | 0,088               |
| 70.....          | 0,054           | 1,14              | 0,176               |
| 60.....          | 0,141           | 1,32              | 0,268               |
| 50.....          | 0,314           | 1,74              | 0,364               |
| 40.....          | 0,668           | 2,24              | 0,467               |
| 30.....          | 1,490           | 3,63              | 0,578               |
| 20.....          | 3,956           | 9,18              | 0,699               |
| 10.....          | 17,58           | 79,9              | 0,840               |
| 0.....           | $\infty$        | $\infty$          | 1                   |

Si l'on représente graphiquement les données des Tableaux II et III

et si l'on compare les deux courbes  $\frac{M}{M_0} = f\left(\frac{d}{l}\right)$ , on remarquera qu'on obtient dans le second cas (mouvement avec formation de surface, de glissement) des valeurs plus considérables, conformément au théorème démontré plus haut (*voir* p. 9).

## CHAPITRE IV

### Mouvement d'un liquide autour de deux plans minces dans le cas où deux tourbillons de rotations opposées sont disposés entre eux

Nous avons étudié, dans le Chapitre II, le mouvement d'un liquide autour de deux plans minces, en supposant que leurs arêtes sont réunies par des surfaces de glissement, et le fluide, compris entre les plans minces et les surfaces de glissement, reste en repos.

Nous considérerons à présent le mouvement d'un liquide autour de deux plans minces, disposés l'un derrière l'autre, orthogonalement au courant, dans le cas où deux tourbillons de rotations opposées sont disposés entre ces plans sur l'axe de symétrie (*voir* la figure schématique 10) et la vitesse n'a pas de maximum sur les parois entre les arêtes.

Les lignes de courant qui réunissent les arêtes ne sont plus des lignes de glissement; les vitesses ne varient pas brusquement lorsqu'on les traverse.

Nous conviendrons que la fonction de courant  $\psi$  est positive dans les domaines I et III et négative dans les domaines II et IV.

La méthode que nous avons appliquée dans le Chapitre II peut être aussi utilisée dans ce cas, si l'on convient de toujours remplacer, dans les domaines II et III,  $|\psi|$  par  $-\sqrt{\psi^2}$ . Le contour KC'ACNI' appartient au demi-plan inférieur et le contour INDBD'K au demi-plan supérieur. En pliant le plan  $z'$  en deux, on obtient le demi-plan  $z$  dont le contour est KC'ACNINDBD'K.

Les plans des variables  $z, \zeta, \log \zeta, w$  et de la variable auxiliaire  $t$  sont représentés dans la planche V.

Pour représenter le plan  $\log \zeta$  sur le plan  $t$  de façon que les points A et B correspondent aux points  $+1$  et  $-1$  du demi-plan  $t$ , il faut poser

$$\frac{d \log \zeta}{dt} = \frac{\Lambda t(t^2 - 1)}{(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)};$$

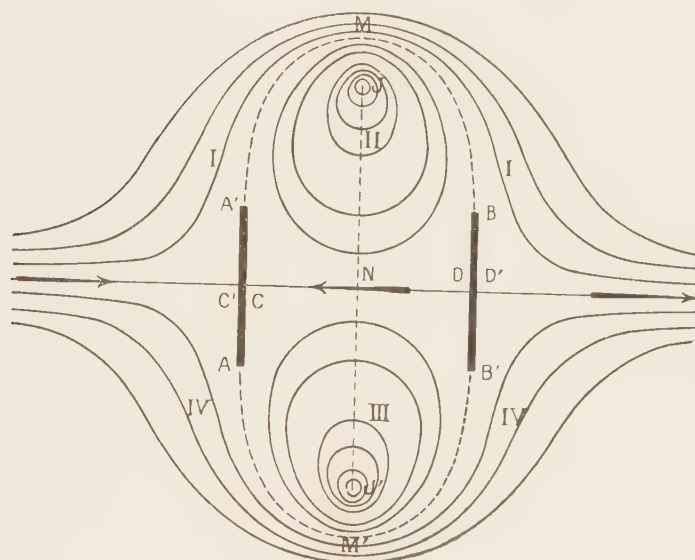


Fig. 10.

A est une constante,  $\pm b$  et  $\pm c$  des grandeurs réelles qui déterminent la position des points  $C_1$ ,  $D_1$  et  $C$ ,  $D$  sur l'axe réel du demi-plan  $t$ . En intégrant, on a

$$(1) \quad \log \zeta = \frac{\Lambda}{2} \left[ \frac{1 - b^2}{c^2 - b^2} \log(t^2 - b^2) + \frac{c^2 - 1}{c^2 - b^2} \log(t^2 - c^2) \right] + C.$$

Au point M correspondent les valeurs

$$t = 0, \quad \log \zeta = \log \frac{1}{q_1}.$$

Entre les points  $C'$  et  $C$ ,  $D$  et  $D'$ ,

$$t^2 > b^2, \quad \log \zeta = \text{partie réelle} \pm i \frac{\pi}{2}.$$

Entre les points C et I, I et D,

$$t^2 > c^2, \quad \log \zeta = \text{partie réelle} \pm i\pi.$$

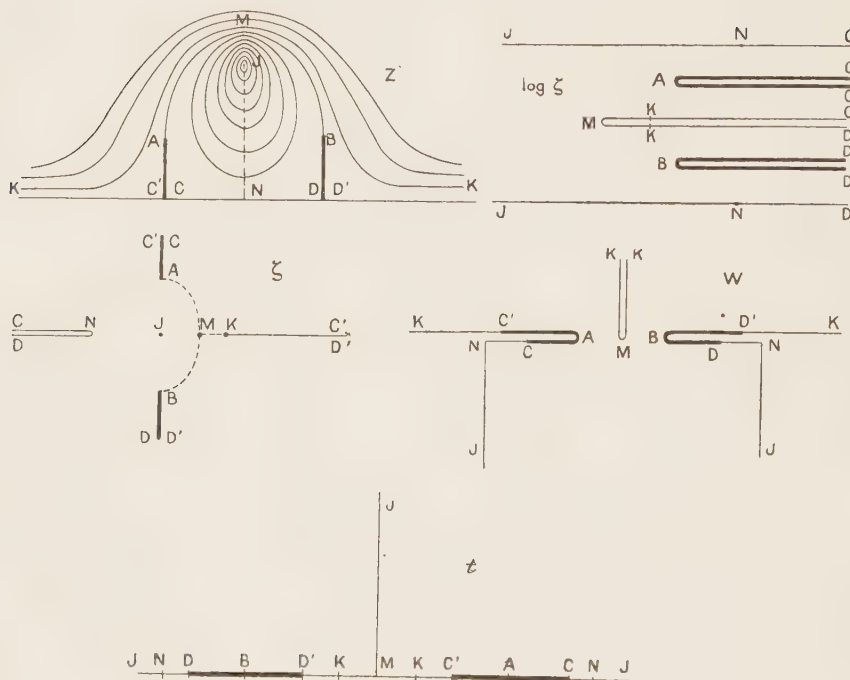


Planche V.

On obtient ainsi les trois équations

$$C = \log \frac{1}{q_1} - \frac{1}{2} A \left[ \frac{1-b^2}{c^2-b^2} \log(-b^2) + \frac{c^2-1}{c^2-b^2} \log(-c^2) \right],$$

$$A \frac{1-b^2}{c^2-b^2} = -1,$$

$$A \frac{c^2-1}{c^2-b^2} = -1,$$

et, par conséquent,

$$A = -2,$$

$$b^2 = c^2 - 1.$$

On peut donc poser

$$\frac{b}{\sqrt{2}} = \sin \alpha, \quad \frac{c}{\sqrt{2}} = \cos \alpha.$$

En faisant ces substitutions dans l'expression (1), on obtient

$$(2) \quad \log q_1 \zeta = -\frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{t^2}{2 \sin^2 \alpha} \right) \left( 1 - \frac{t^2}{2 \cos^2 \alpha} \right),$$

où  $q_1$  exprime la vitesse au point M.

Le paramètre  $\alpha$  a la signification simple suivante; aux points A et B,

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad q = q_A, \quad t^2 = 1$$

et, par conséquent,

$$\frac{q_A}{q_1} = \cot 2\alpha.$$

Pour représenter le plan  $\omega$  sur le demi-plan  $t$ , posons

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B t (t^2 - 1)}{(t^2 - b_1^2)^{\frac{1}{2}} (t^2 - c_1^2)^{\frac{3}{2}}};$$

B est une constante,  $\pm b_1$  et  $\pm c_1$  les valeurs de  $t$  qui correspondent aux points N et K sur l'axe réel du plan  $t$ . Les points A et B correspondent aux points  $t = \pm 1$ .

L'intégrale peut s'écrire

$$\omega = \frac{1}{2} B \left[ i \frac{\psi}{|\psi|} \arcsin \frac{2t^2 - (b_1^2 + c_1^2)}{(b_1^2 - c_1^2)} + \frac{c_1^2 - 1}{b_1^2 - c_1^2} \sqrt{\frac{t^2 - b_1^2}{t^2 - c_1^2}} \right] + C,$$

car il faut toujours remplacer  $\sqrt{-1}$  par  $i \frac{\psi}{|\psi|}$ .

Au point  $t = 0$  correspond la valeur  $\omega = 0$ , donc

$$(3) \quad \omega = \frac{1}{2} B \left[ i \frac{\psi}{|\psi|} \left( \arcsin \frac{2t^2 - (b_1^2 + c_1^2)}{b_1^2 - c_1^2} + \arcsin \frac{b_1^2 + c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} \right) - \frac{c_1^2 - 1}{b_1^2 - c_1^2} \left( \sqrt{\frac{t^2 - b_1^2}{t^2 - c_1^2}} - \frac{b_1}{c_1} \right) \right].$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{b_1^2 + c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} &= \arcsin \left( 1 + \frac{2c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} \right) = \frac{\pi}{2} + 2i \frac{\psi}{|\psi|} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{c_1^2}{b_1^2 - c_1^2}}, \\ \arcsin \frac{2t^2 - (b_1^2 + c_1^2)}{b_1^2 - c_1^2} &= \arcsin \left[ 1 + \frac{2(t^2 - b_1^2)}{b_1^2 - c_1^2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} + 2i \frac{\psi}{|\psi|} \operatorname{arsh} \left( i \frac{\psi}{|\psi|} \sqrt{\frac{b_1^2 - t^2}{b_1^2 - c_1^2}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - 2i \frac{\psi}{|\psi|} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{c_1^2 - t^2}{b_1^2 - c_1^2}}, \end{aligned}$$

la formule (3) peut s'écrire

$$\omega = -\frac{1}{2} B \left[ i \frac{\psi}{|\psi|} \left( \pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{b_1^2 - t^2}{b_1^2 - c_1^2}} \right) + \frac{c_1^2 - 1}{b_1^2 - c_1^2} \sqrt{\frac{t^2 - b_1^2}{t^2 - c_1^2}} \right] \\ - \frac{1}{2} B \left[ 2 \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{c_1^2}{b_1^2 - c_1^2}} + \frac{c_1^2 - 1}{b_1^2 - c_1^2} \frac{b_1}{c_1} \right].$$

Les membres inclus dans le second crochet sont réels, car

$$b_1^2 > 1 > c_1^2.$$

Lorsque  $t^2$ , en restant réel, varie de  $c_1^2$  à  $b_1^2$ , entre les points N et K,  $\omega$  est réel, tandis que les membres inclus dans le premier crochet sont purement imaginaires. Les coefficients  $b_1$  et  $c_1$  doivent donc satisfaire à la condition

$$(4) \quad 2 \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{c_1^2}{b_1^2 - c_1^2}} = \frac{1 - c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} \frac{b_1}{c_1}$$

et la constante B doit être purement imaginaire. Posons

$$B = -i q_0 b,$$

où  $q_0$  est la vitesse du courant à l'infini et  $b$  un paramètre qui détermine l'unité de longueur.

On a ainsi, pour  $c_1^2 < t^2 < b_1^2$ ,

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\psi}{|\psi|} q_0 b \left[ \pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{b_1^2 - t^2}{b_1^2 - c_1^2}} - \frac{1 - c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} \sqrt{\frac{b_1^2 - t^2}{t^2 - c_1^2}} \right];$$

pour  $t^2 > b_1^2$ ,

$$\omega = \frac{1}{2} q_0 b \left[ \frac{\psi}{|\psi|} \pi + i \left( 2 \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{t^2 - b_1^2}{b_1^2 - c_1^2}} - \frac{1 - c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} \sqrt{\frac{t^2 - b_1^2}{t^2 - c_1^2}} \right) \right];$$

et pour  $t^2 < c_1^2$ ,

$$\omega = -\frac{1}{2} q_0 b i \left( 2 \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{c_1^2 - t^2}{b_1^2 - c_1^2}} - \frac{1 - c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} \sqrt{\frac{b_1^2 - t^2}{c_1^2 - t^2}} \right).$$

Ces formules permettent de vérifier qu'effectivement, lorsque le point  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , le point  $\omega$  décrit le contour indiqué sur le plan  $\omega$  de la planche V.

Sur la coupure NI,  $t^2 > b_1^2$ , le potentiel des vitesses change brus-

quement de signe. La circulation autour de chaque tourbillon est donc

$$\kappa = q_0 b \pi = \pi q_0 l \left( \frac{b}{l} \right),$$

où  $l$  est la largeur des plans, et la valeur du rapport  $\frac{b}{l}$  est indiquée plus bas.

En posant dans la formule (4)

$$\frac{c_1}{b_1} = \tanh \beta,$$

on a

$$(5) \quad b_1 = \frac{\coth \beta}{\sqrt{\frac{4\beta}{\operatorname{sh} 2\beta} + 1}},$$

$$(6) \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta}{\operatorname{sh} 2\beta} + 1}}.$$

Au point à l'infini K correspondent les valeurs  $t^2 = c_1^2$ ,  $\theta = 0$ ,  $q = q_0$  et l'équation (2) (p. 38) donne

$$(7) \quad \left( \frac{q_0}{q_1} \right)^2 = \frac{(1 - c_1^2)^2 - \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}.$$

Aux points N correspondent les valeurs

$$t^2 = b_1^2, \quad \theta = \pi, \quad q = q_N;$$

donc

$$(8) \quad \left( \frac{q_N}{q_1} \right)^2 = \frac{(b_1^2 - 1)^2 - \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}.$$

Aux points A et B, comme nous l'avons obtenu plus haut (voir p. 35),

$$(9) \quad \frac{q_A}{q_1} = \cot 2\alpha.$$

En posant

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma = \frac{b_1^2 - 1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1 + \left( \frac{q_N}{q_1} \right)^2}, \\ \delta = \frac{1 - c_1^2}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1 + \left( \frac{q_0}{q_1} \right)^2}, \end{cases}$$

on a, d'après les formules (5)-(10),

$$\beta \operatorname{tanh} \beta = \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{\gamma}{\delta} \right)},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\delta} \frac{4\beta}{\operatorname{sh} 2\beta + 4\beta}.$$

Ces formules permettent de calculer  $\alpha$  si l'on connaît les coefficients  $\gamma$  et  $\delta$ .

On obtient une relation de dépendance entre les coefficients  $\gamma$  et  $\delta$  en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_{\sqrt{2} \sin \alpha}^{\sqrt{2} \cos \alpha} \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt \\ &= -b \frac{q_0}{q_1} \int_{\sqrt{2} \sin \alpha}^{\sqrt{2} \cos \alpha} \frac{(t^2 - 1)t dt}{\sqrt{\left( \frac{t^2}{2 \sin^2 \alpha} - 1 \right) \left( \frac{t^2}{2 \cos^2 \alpha} - 1 \right) (t^2 - b_1^2) (t^2 - c_1^2)^3}} = 0, \end{aligned}$$

qui exprime que, lorsqu'on fait varier  $t$  de  $\sqrt{2} \sin \alpha$  à  $\sqrt{2} \cos \alpha$ , l'ordonnée du point correspondant  $z$ , qui est nulle au départ, s'annule de nouveau après que le point  $z$  a décrit les deux côtés du plan mince.

En faisant le changement de variable

$$(11) \quad t^2 = x \cos 2\alpha + 1,$$

on trouve

$$(12) \quad \text{I} = -\frac{b}{2} \frac{\sqrt{\delta^2 - 1}}{\gamma^2 \delta^3} \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{(1 - x^2) \left( 1 - \frac{x}{\gamma} \right) \left( 1 + \frac{x}{\delta} \right)^3}} = 0.$$

$\frac{1}{\gamma}$  et  $\frac{1}{\delta}$  étant  $< 1$ , développons en série le produit

$$\left( 1 - \frac{x}{\gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{x}{\delta} \right)^{-\frac{3}{2}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

En substituant ce développement dans l'intégrale I et en remarquant que les membres impairs s'annulent lorsqu'on effectue l'intégration

de  $-1$  à  $+1$ , on peut écrire

$$(13) \quad \begin{aligned} I &= - \frac{b\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^1 \frac{a_{2n+1} x^{2(n+1)} dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= - \frac{b\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2.4.6\dots(2n+2)} \pi a_{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients  $a_{2n+1}$  peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} = \frac{1}{\gamma^{2n+1}} \left\{ \right. & \frac{1.3.5\dots[2(2n+1)-1]}{2.4.6\dots[2(2n+1)]} \\ & - \frac{1.3.5\dots[2(2n+1)-3]}{2.4.6\dots[2(2n+1)-2]} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \left( \frac{\gamma}{\delta} \right) \\ & + \frac{1.3.5\dots[2(2n+1)-5]}{2.4.6\dots[2(2n+1)-4]} \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot 5 \left( \frac{\gamma}{\delta} \right)^2 - \dots \\ & \left. - \frac{1.3.5\dots[2(2n+1)-1]}{2.4.6\dots[2(2n+1)]} \cdot [2(2n+1)+1] \left( \frac{\gamma}{\delta} \right)^{2n+1} \right\} = \frac{b_{2n+1}}{\gamma^{2n+1}}. \end{aligned}$$

En se donnant une valeur positive du rapport  $\frac{\gamma}{\delta}$ , on calculera un nombre suffisant de coefficients  $b_{2n+1}$ , et l'on cherchera ensuite la valeur correspondante de  $\gamma$  qui annule l'intégrale  $I$ .

On ramène l'intégrale  $I$  à la forme normale de Weierstrass, en effectuant le changement de variable

$$(14) \quad \begin{cases} x = \frac{1-\delta(n-z)}{(n-z)}, \\ z = n - \frac{1}{\delta+x}, \end{cases}$$

où

$$n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\delta+\gamma} + \frac{1}{\delta+1} + \frac{1}{\delta-1} \right).$$

Les racines du polynôme  $4z^3 - g_2z - g_3$  sont

$$e_1 = n - \frac{1}{\delta+\gamma},$$

$$e_2 = n - \frac{1}{\delta+1},$$

$$e_3 = n - \frac{1}{\delta-1}.$$

On a ainsi

$$I = - \frac{b}{\sqrt{\gamma + \delta}} \int_{l_1}^{l_2} \frac{[(1 - \delta n) + \partial z] dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

et, en effectuant l'intégration,

$$I = \frac{b}{\sqrt{\gamma + \delta}} [\delta \zeta \omega + (\delta n - 1) \omega].$$

L'équation (12) est, par conséquent, équivalente à l'équation

$$(15) \quad \delta \zeta \omega - (1 - \delta n) \omega = 0.$$

En désignant par  $l$  la largeur des plans, par  $d$  la distance entre eux, par  $h$  la distance entre les tourbillons, par  $R$  la résultante des pressions sur l'un des plans, en faisant le changement de variables (11) et (14), et en posant

$$\begin{aligned} n &= p \nu, \\ n - \frac{1}{\delta} &= p (\nu_0 + \omega'), \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{l}{b} &= -2 \int_0^{\sqrt{2} \cos \alpha} \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{2\delta}{\sqrt{\gamma + \delta}} \int_{\nu_0 + \omega'}^{\omega + \omega'} [pu - p(\nu_0 + \omega')] du, \\ \frac{d}{l} &= \frac{2}{l} \int_{\sqrt{2} \cos \alpha}^{b_1} \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{2\delta i}{\sqrt{\gamma + \delta}} \cdot \frac{b}{l} \int_{\omega + \omega'}^{\omega} [pu - p(\nu_0 + \omega')] du, \\ \frac{h}{l} &= \frac{2}{l} \int_{b_1}^{\infty} \frac{dy}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} dt = -\frac{2\delta}{\sqrt{\gamma + \delta}} \cdot \frac{b}{l} \int_{\omega}^{\nu} [pu - p(\nu_0 + \omega')] du, \\ \frac{R}{\rho q_0^2 l} &= -\frac{1}{q_0^2 l} \int_{\sqrt{2} \sin \alpha}^{\sqrt{2} \cos \alpha} q^2 \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma + \delta} (\delta^2 - 1)} \cdot \frac{b}{l} \\ &\quad \times \int_{\omega'}^{\omega + \omega'} \frac{[1 + 2\delta(pu - p\nu) + (\delta^2 - 1)(pu - p\nu)^2][1 + \delta(pu - p\nu)] du}{(pu - p\nu)^2}. \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration et en prenant en considération l'équa-

tion (15), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{l}{b} &= \frac{2\delta}{\sqrt{\gamma+\delta}} \left[ \zeta v_0 + \left( n - \frac{1}{\delta} \right) v_0 + \frac{1}{2} \frac{p' v_0}{p v_0 - e_3} \right], \\ \frac{d}{l} &= \frac{2\delta}{\sqrt{\gamma+\delta}} \frac{b}{l} \frac{\pi}{2\omega}, \\ \frac{h}{l} &= \frac{2\delta}{\sqrt{\gamma+\delta}} \frac{b}{l} \left[ \zeta v + \left( n - \frac{1}{\delta} \right) v \right], \\ \frac{R}{\rho q_0^2 l} &= - \frac{2}{\sqrt{\gamma+\delta}(\delta^2-1)} \frac{b}{l} \left[ \left( 3\delta - \frac{p' v}{(p' v)^2} \right) \frac{\omega \zeta v - v' \zeta \omega}{p' v} + \left( \delta^2 - \frac{1}{\delta(p' v)^2} \right) \omega \right].\end{aligned}$$

On peut aussi représenter le rapport  $(R : \rho q_0^2 l)$  en utilisant le développement, indiqué à la page 39, comme suit :

$$\begin{aligned}(16) \quad \frac{R}{\rho q_0^2 l} &= \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} \sqrt{\delta^2-1}} \frac{b}{l} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^1 \frac{a_{2n+1} (x^{2(n+1)} - x^{2(n+2)}) dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\gamma^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} (\delta^2-1)^{\frac{1}{2}}} \frac{b}{l} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n+2)} \frac{a_{2n+1}}{2(n+2)}.\end{aligned}$$

J'ai effectué les calculs numériques dans le cas où le rapport  $\frac{\gamma}{\delta}$  est égal à 0,4. Les rapports  $\frac{d}{l}$  et  $\frac{h}{l}$  ( $l$  exprime la largeur des plans,  $d$  la distance entre eux,  $h$  la distance entre les deux tourbillons) de la figure 10 correspondent approximativement à ce cas. La résultante des pressions est négative, c'est une force de répulsion qui tend à éloigner les deux plans l'un de l'autre; on le démontre facilement en remarquant que, pour la valeur  $\frac{\gamma}{\delta} = 0,4$ , le coefficient  $a_1$  est négatif, tandis que tous les autres coefficients sont positifs, et en comparant ensuite les expressions (13) et (16).

Le mouvement que nous venons d'étudier, n'étant pas irrotationnel, ne peut pas naître dans le fluide parfait si l'on met brusquement en mouvement le système des deux plans (1).

---

(1) M. H. Villat a fait à propos du calcul développé ci-dessus l'importante remarque suivante. Le mouvement considéré ne peut être permanent que si l'équation

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{\kappa}{2i\pi(z-z_0)} \right) = 0,$$

où  $z_0$  désigne l'affixe du tourbillon, est satisfaite. Je discute la condition de M. Villat

## CHAPITRE V

### Mouvement initial d'un liquide en contact avec un corps solide à arêtes vives

On admet généralement que, lorsqu'on met brusquement en mouvement un corps solide dans un liquide, le mouvement initial de ce dernier dépend du potentiel des vitesses  $\varphi$  qui détermine le mouvement permanent, irrotationnel, non glissant, compatible avec la forme du solide et que ce n'est qu'ensuite, grâce au frottement du fluide sur les parois, que commence à se former la plage d'eau morte derrière le solide. Ce raisonnement peut convenir dans un fluide réel lorsque la condition pour la pression de ne pas devenir négative est satisfaite, mais non aux cas où le potentiel  $\varphi$  conduirait à des pressions négatives, notamment aux cas de solides à arêtes vives se mouvant dans un fluide parfait.

La variation instantanée des vitesses, due à la pression impulsive

$$p_0 = \int_0^\tau p \, dt,$$

où  $\tau$  est un intervalle infiniment petit, est exprimée par les équations (11) de la page 10. La pression  $p$  qui figure sous le signe  $\int$  ne doit pas devenir négative, car de pareilles pressions négatives provoqueraient une scission dans le fluide, sans faire naître le mouvement

---

dans une Note des *Comptes rendus*, (t. 174, 1922, p. 1226), où je complète et généralise le problème considéré dans le présent Chapitre. Je démontre que dans le cas particulier étudié ci-dessus, où le maximum de vitesse a lieu sur les arêtes, la condition de la permanence du mouvement n'est pas remplie et je donne la solution du problème dans le cas où cette condition est vérifiée. J'indique aussi dans cette Note qu'on peut rendre le mouvement permanent dans tous les cas, en considérant l'une quelconque des lignes de courant fermées  $S$  comme une paroi rigide fixe et calcule la résultante des pressions hydrodynamiques sur  $S$ ; cette force est normale à la vitesse du courant à l'infini et s'annule lorsque la condition de M. Villat est satisfaite.

correspondant au potentiel  $\varphi$ ; on n'aperçoit pas le mouvement qui prendra effectivement naissance dans le fluide dans ces conditions.

Comme il ne peut exister mathématiquement qu'une seule forme de mouvement permanent compatible avec la forme du solide <sup>(1)</sup>, et que cette forme unique ne peut pas exister physiquement, il en résulte que le mouvement sera nécessairement non-permanent.

Nous nous représentons comme suit le mécanisme de ce mouvement. Lorsqu'on met le solide brusquement en mouvement le fluide qu'il rencontre par devant doit nécessairement s'écouler latéralement, tandis que l'inertie du fluide disposé derrière le solide tendra à le détacher de la surface du corps. Une cavitation momentanée apparaîtra derrière le solide; la diminution brusque de la pression qui en résultera provoquera aussitôt un reflux du liquide vers le corps;

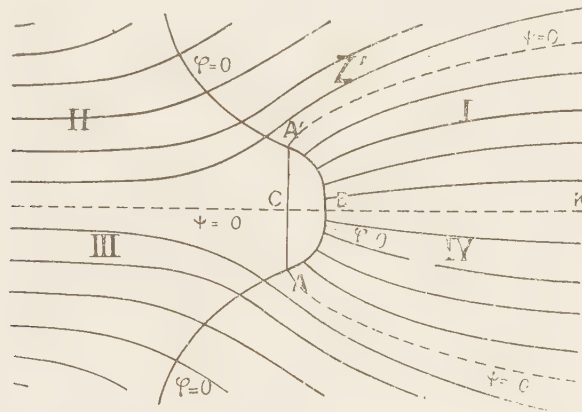


Fig. 11.

la surface de discontinuité, apparue à la surface du solide, se repliera sur elle-même et s'étalera dans le fluide. Les vitesses normales, des deux côtés de cette surface de discontinuité, seront à tout moment

(1) Si l'on pouvait introduire des surfaces de glissement, la solution du problème cesserait d'être unique. Rappelons à ce propos la belle découverte des solutions multiples de M. H. Villat, *Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides* (Annales de l'École normale supérieure, 1914), et la Thèse de M. R. Thiry qui s'y rattache, *Sur les solutions multiples des problèmes d'hydrodynamique relatifs aux mouvements glissants* (Annales de l'École normale supérieure, 1921).

égales entre elles, mais les vitesses tangentielles varieront brusquement.

Nous nous proposons d'étudier dans ce Chapitre le mouvement initial d'un liquide incompressible dans un domaine à deux dimensions produit par la mise en mouvement brusque d'un obstacle <sup>(1)</sup> limité par un arc de courbe concave  $2s$  et un segment rectiligne de longueur  $2r$ , normal au courant relatif (*voir* la figure 11), en admettant que :

1° Le liquide partant du repos, son mouvement est, au départ, irrotationnel et non glissant.

2° La pression ne devient nulle part négative.

3° La mise en mouvement brusque de l'obstacle détermine l'apparition momentanée d'une cavitation derrière l'obstacle, sur la courbe  $S$  <sup>(2)</sup>. Les vitesses de décollement  $q_i$  sont égales et normales sur cette courbe.

Pour pouvoir appliquer la même méthode que nous avons utilisée dans les Chapitres précédents, nous conviendrons que dans les domaines I, II, III, IV, on a respectivement

| Domaines. | $\psi$ . | $ \psi $         |
|-----------|----------|------------------|
| I. ....   | $< 0$    | $-\sqrt{\psi^2}$ |
| II. ....  | $> 0$    | $+\sqrt{\psi^2}$ |
| III. .... | $< 0$    | $+\sqrt{\psi^2}$ |
| IV. ....  | $> 0$    | $-\sqrt{\psi^2}$ |

Sur la coupure BK la valeur de  $\psi$  varie brusquement. Nous attribuons les points du rayon BK au demi-plan supérieur et les points du rayon KC au demi-plan inférieur du plan  $z'$ .

Les plans des variables  $z$ ,  $\zeta$ ,  $\log \zeta$ ,  $\omega$ , et des variables auxiliaires  $t'$  et  $t$  sont représentés sur la planche VI.

(1) *Loc. cit.*, ante, p. 26; *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 521.

(2) Le corps du solide, à l'exception du segment rectiligne, pourrait aussi être considéré comme liquide.

On représentera le plan  $\omega$  sur le plan  $t_1$ , en posant

$$\frac{d\omega}{dt_1} = M \sqrt{\frac{a+t_1}{a-t_1}}$$

ou en intégrant et en supposant que pour  $t_1 = a$ ,  $\omega = -iq_1 s$ , et pour  $t_1 = -a$ ,  $\omega = 0$ ,

$$\omega = -\frac{iq_1 S}{\pi} \left[ \arcsin \frac{t_1}{a} - \sqrt{1 - \left(\frac{t_1}{a}\right)^2} + \frac{\pi}{2} \right].$$

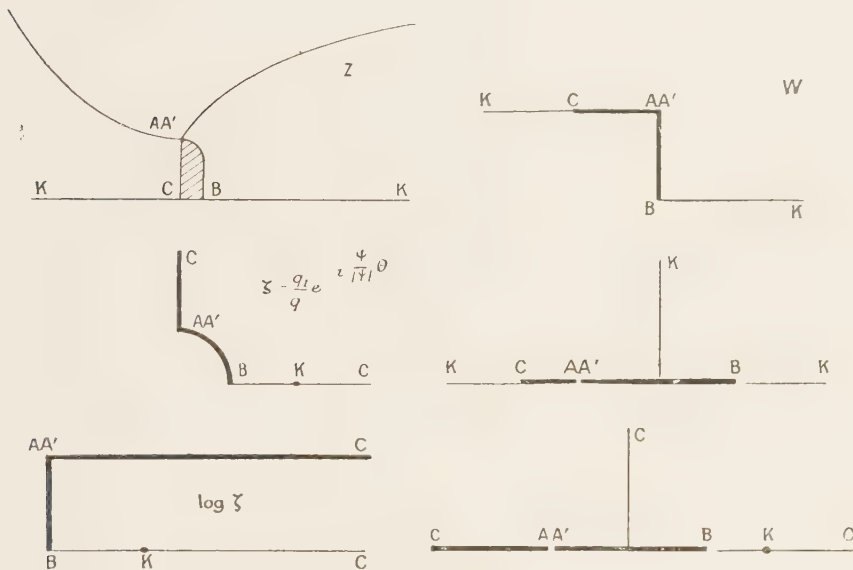


Planche VI.

On représentera ensuite le demi-plan  $t_1$  sur le demi-plan  $t$  en posant

$$\frac{t_1}{a} = \frac{1 - \tan \alpha \cdot t}{t - \tan \alpha}.$$

Donc, enfin

$$\omega = -\frac{Sq_1 i}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1 - \tan \alpha \cdot t}{t - \tan \alpha} - \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \tan \alpha \cdot t}{t - \tan \alpha}\right)^2} + \frac{\pi}{2} \right]$$

Pour représenter le plan  $\zeta$  sur le plan  $t$ , posons

$$t = \frac{1}{2} \left( \zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

où les constantes d'intégration ont été choisies de façon à faire correspondre les points AA' et B respectivement aux points  $t = -1$  et  $t = 1$  du plan  $t$ . Lorsque  $t = \tan \alpha$ , on a  $\omega = \infty$ ,  $\theta = 0$ ,  $q = q_0$  et, par conséquent,

$$(1) \quad \tan \alpha = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q_1}{q_0} \right)^2 + \left( \frac{q_0}{q_1} \right)^2 \right].$$

Pour calculer les coordonnées de la courbe de décollement  $\zeta$ , remarquons d'abord que sur cette courbe

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= q_1, \\ l &= \cos 2\theta, \\ dx &= \sin \theta ds, \\ dy &= \cos \theta ds. \end{aligned}$$

Les intégrales de ces deux dernières expressions sont

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \int_1^t \sin \theta \frac{ds}{d\psi} \frac{d\psi}{dt_1} \frac{dt_1}{dt} dt \\ &= \frac{s}{\pi} (\tan \alpha - 1) \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\left( \cos^2 \theta + \frac{1 + \tan \alpha}{2} \right)^2} \\ y &= \int_1^t \cos \theta \frac{ds}{d\psi} \frac{d\psi}{dt_1} \frac{dt_1}{dt} dt \\ &= \frac{s}{\pi} (\tan \alpha - 1) \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} \int_0^0 \frac{\cos^3 \theta d\theta}{\left( \sin^2 \theta + \frac{\tan \alpha - 1}{2} \right)^2}, \end{aligned} \right.$$

et, en effectuant l'intégration, on trouve

$$x = \frac{s}{2\pi} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} (\tan \alpha - 1) \left[ \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\tan \alpha + 1}{2}}} \log \frac{\sqrt{\frac{1}{2} (\tan \alpha + 1) - \cos \theta}}{\sqrt{\frac{1}{2} (\tan \alpha + 1) + \cos \theta}} + \frac{\cos \theta}{\frac{1}{2} (\tan \alpha + 1) - \cos^2 \theta} \right]$$

et

$$y = \frac{s}{2\pi} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} \left[ (\tan \alpha + 1) \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta + \frac{1}{2} (\tan \alpha - 1)} + \frac{3 - \tan \alpha}{\sqrt{\frac{1}{2} (\tan \alpha - 1)}} \arctan \frac{\sin \theta}{\sqrt{\frac{1}{2} (\tan \alpha - 1)}} \right];$$

où l'angle  $\theta$  détermine la direction de la vitesse de décollement et varie, par conséquent, de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$ . En posant dans la dernière expression  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on obtient la demi-longueur  $r$  du segment rectiligne formant la face antérieure de l'obstacle

$$(3) \quad \frac{\pi r}{2s} = \frac{1}{2} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} + \frac{1}{2} (3 - \tan \alpha) \sqrt{\frac{1}{2} (\tan \alpha + 1)} \arctan \sqrt{\frac{2}{\tan \alpha - 1}}.$$

On peut aussi calculer la valeur de  $r$  en intégrant le long du segment (CA'). Le long de ce segment on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et, par conséquent,

$$t = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 + \left( \frac{q}{q_1} \right)^2 \right] \\ \frac{q_1}{q} = \sqrt{-t + \sqrt{t^2 - 1}}.$$

Il faut prendre le signe + devant le second radical pour que  $q$  s'annule lorsqu'on pose  $t = -\infty$ . On obtient ainsi

$$r = \int_0^r dy = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt_1} \frac{dt_1}{dt} dt \\ = \frac{s}{\pi} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} (\tan \alpha - 1) \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{t+1} \sqrt{-t + \sqrt{t^2 - 1}} dt}{\sqrt{t-1} (t - \tan \alpha)^2}.$$

En faisant le changement de variable

$$t = -\frac{1}{2} (\xi^2 + \xi^{-2}),$$

on a

$$\frac{\pi r}{2s} = 2\sqrt{\tan^2 \alpha - 1} (\tan \alpha - 1) \int_1^\infty \frac{(\xi^2 - 1)^2 \xi^2 d\xi}{(\xi^4 + 2 \tan \alpha \xi^2 + 1)^2}.$$

En décomposant l'expression sous le signe  $\int$  en fractions simples, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{(\xi^2 - 1)^2 \xi^2}{(\xi^4 + 2 \tan \alpha \xi^2 + 1)^2} = & -\frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{1 - \tan \alpha} \frac{\xi^2 - \gamma^2}{(\xi^2 + \gamma^2)^2} - \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{(1 - \tan \alpha)} \frac{\xi^2 - \delta^2}{(\xi^2 + \delta^2)^2} \\ & + \frac{\gamma^2}{4(1 - \tan \alpha)} \left( \frac{4}{\gamma^2 - \delta^2} - 1 \right) \frac{1}{\xi^2 + \gamma^2} \\ & + \frac{\delta^2}{4(1 - \tan \alpha)} \left( \frac{4}{\delta^2 - \gamma^2} - 1 \right) \frac{1}{\xi^2 + \delta^2}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \tan \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}, \\ \delta^2 &= \tan \alpha + \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}. \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration, on a

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{\pi r}{2s} = & \frac{1}{2} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} + \left( \frac{1}{2} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} + 1 \right) \gamma \operatorname{arc tang} \gamma \\ & + \left( \frac{1}{2} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} - 1 \right) \delta \operatorname{arc tang} \delta. \end{aligned}$$

En égalisant les secondes parties des expressions (3) et (4), on obtient une équation qui détermine la valeur du paramètre  $\tan \alpha$

$$\begin{aligned} (5) \quad & \left( \frac{1}{2} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} + 1 \right) \gamma \operatorname{arc tang} \gamma + \left( \frac{1}{2} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} - 1 \right) \delta \operatorname{arc tang} \delta \\ & = \frac{1}{2} (3 - \tan \alpha) \sqrt{\frac{1}{2} (\tan \alpha + 1) \operatorname{arc tang} \sqrt{\frac{2}{\tan \alpha - 1}}}. \end{aligned}$$

La racine qui correspond à notre problème est

$$\tan \alpha = \sqrt{5}.$$

Pour démontrer que  $\sqrt{5}$  est effectivement une racine de l'équa-

tion (5), remarquons d'abord que pour  $\text{tang} \alpha = \sqrt{5}$ , on a

$$\frac{1}{2} \sqrt{\text{tang}^2 \alpha - 1} + 1 = 2,$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\text{tang}^2 \alpha - 1} - 1 = 0,$$

$$\gamma = \sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

$$\frac{1}{2} (3 - \text{tang} \alpha) \sqrt{\frac{1}{2} (\text{tang} \alpha + 1)}$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\text{tang} \alpha - 1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5), on la ramène à l'égalité

$$2 \text{ arc tang} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \right) = \text{arc tang} \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}.$$

Pour faire voir que cette expression est effectivement une égalité, posons

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \text{tang} \beta,$$

on a alors

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \cot \beta,$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \text{tang} \frac{\beta}{2}$$

et

$$2 \text{ arc tang} \left( \text{tang} \frac{\beta}{2} \right) = \text{arc tang} (\text{tang} \beta).$$

En substituant la valeur trouvée du paramètre  $\text{tang} \alpha$  dans les formules (1) et (4), on obtient comme rapport de la vitesse de décolllement  $q_1$  à la vitesse à l'infini  $q_0$  la valeur

$$\frac{q_1}{q_0} = \sqrt{\sqrt{5} + 2} = 2,06,$$

et que

$$\frac{\pi r}{2s} = 1 + 2\sqrt{\sqrt{5} - 2} \operatorname{arc tang} \sqrt{\sqrt{5} - 2},$$

$$\frac{s}{r} = 1,09.$$

Quelques valeurs numériques des coordonnées de la surface de décollement  $s$ , calculées d'après les formules (2) en y posant

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{5},$$

sont données dans le Tableau ci-dessous :

| $\theta^\circ$ | $\frac{\pi x}{2s}$ | $\frac{\pi y}{2s}$ |
|----------------|--------------------|--------------------|
| 90.....        | 0                  | 1,440              |
| 80.....        | 0,0003             | 1,439              |
| 70.....        | 0,007              | 1,438              |
| 60.....        | 0,024              | 1,429              |
| 50.....        | 0,059              | 1,409              |
| 40.....        | 0,120              | 1,334              |
| 30.....        | 0,210              | 1,206              |
| 20.....        | 0,329              | 0,952              |
| 10.....        | 0,436              | 0,540              |
| 0.....         | 0,458              | 0                  |

On peut aussi obtenir le mouvement envisagé dans ce Chapitre, en considérant d'abord le mouvement comme permanent et entretenu par une couche de sources d'égale intensité disposées sur la courbe  $S$ , et en admettant ensuite, qu'à un moment donné, ces sources tarissent simultanément.

Il serait intéressant de comparer expérimentalement si les mouvements fluides engendrés des deux manières indiquées plus haut se transforment ensuite effectivement dans les fluides réels d'une façon plus ou moins semblable.

## CONCLUSION

Nous nous étions proposé d'étudier quelques formes de mouvements d'un liquide autour d'un obstacle pouvant être utiles à l'explication du phénomène de la résistance des fluides. Nous avons considéré d'abord certaines propositions générales se rattachant au théorème d'énergie minima de Lord Kelvin. Nous avons démontré que si l'on a deux corps solides  $a$  et  $b$  se mouvant avec la même vitesse uniforme  $u_0$  et tels que la forme, les dimensions et la position du corps  $a$  permettent de le considérer comme une partie du corps  $b$ , la somme de l'énergie cinétique du fluide autour du corps  $a$  et de l'énergie cinétique d'un volume fluide égal à la différence des volumes des corps  $b$  et  $a$  et animé de la vitesse  $u_0$ , est plus grande que l'énergie cinétique du fluide autour du corps  $b$ . On obtient comme corollaire que l'énergie cinétique du mouvement irrotationnel non glissant est moindre que celle d'un mouvement avec glissement, compatible avec la forme du corps, et, comme deuxième corollaire, que, si l'on peut obtenir le corps  $b$  en ajoutant au corps  $a$  des surfaces non fermées infiniment minces, l'énergie cinétique du liquide autour du corps  $b$  est plus grande que l'énergie cinétique du fluide autour du corps  $a$ . L'énergie cinétique du fluide autour d'une surface découpée dans un disque est, par exemple, plus petite que l'énergie cinétique du mouvement autour du disque lui-même.

Dans le cas de mouvements discontinus considérés jusqu'ici, on admet qu'il se forme une plage indéfinie d'eau morte derrière l'obstacle. Nous indiquons une méthode permettant de trouver la solution de problèmes de mouvements discontinus symétriques par rapport à un axe perpendiculaire à la direction du mouvement du solide. Nous appliquons cette méthode d'abord au cas du mouvement de deux plans disposés l'un derrière l'autre, orthogonalement au courant relatif, en admettant que leurs arêtes sont réunies par des surfaces de glissement. Le cas étudié par Kirchhoff apparaît comme le cas limite d'un éloignement mutuel infini des deux plans. Nous com-

parons dans le Chapitre suivant l'inertie additive d'un contour rectangle qui se meut dans un liquide en repos à l'infini, en supposant d'abord qu'il ne se forme pas de surfaces de glissement sur les côtés qui sont parallèles au mouvement et en admettant ensuite que de pareilles surfaces de glissement existent. L'inertie additive des mouvements glissants considérés jusqu'à présent était toujours infinie.

Nous appliquons ensuite notre méthode au problème du mouvement d'un liquide autour de deux plans minces dans le cas où deux tourbillons d'égales intensités, mais de rotations opposées, sont disposés entre les plans sur l'axe de symétrie, normale à la direction du mouvement.

Nous considérons, en dernier lieu, dans le Chapitre V, un cas pouvant exprimer le mouvement initial d'un liquide autour d'un solide à arêtes vives qu'on met brusquement en mouvement.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 27 mai 1922.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 27 mai 1922.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. APPELL.

---

---

## SECONDE THÈSE

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES

DE

# MOUVEMENT DE CORPS SOLIDES

DANS UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE

---

### INTRODUCTION

L'étude et l'interprétation géométrique des mouvements fluides non permanents étant beaucoup plus difficile que celle des mouvements permanents, dont les éléments ne sont fonction que de trois variables indépendantes, les coordonnées des points du volume occupé par le fluide, on tâche de ramener, lorsque cela est possible, l'étude des mouvements non permanents à celle des mouvements permanents en rapportant le mouvement du fluide à des axes mobiles.

Par exemple, dans le cas du mouvement rectiligne uniforme d'un solide dans un fluide parfait indéfini, on rapporte le mouvement du fluide à des coordonnées invariablement liées au solide. De même dans le cas où le solide est animé d'un mouvement hélicoïdal uni-

forme, on exclut le facteur temps en rapportant le mouvement du fluide à un système d'axes qui tourne et glisse avec le solide <sup>(1)</sup>.

Dans les fluides réels, il advient souvent que le mouvement du fluide n'étant pas permanent, par rapport aux axes liés au corps, dans tout le domaine occupé par le fluide, l'est cependant dans un domaine restreint entourant le solide. Il est aussi utile, dans ce cas, de rapporter le mouvement du fluide à ces axes.

On observe souvent dans les fluides réels des mouvements périodiques provoqués par le déplacement de solides [tourbillons de M. H. Bénard <sup>(2)</sup>, par exemple]. Le mouvement du fluide est alors non permanent, mais les valeurs moyennes des éléments qui caractérisent le mouvement, lorsqu'on les rapporte à des axes invariablement liés au solide, sont indépendants du temps. L'importante question des mouvements fluides permanents en moyenne, vient d'être traitée d'un point de vue très général par M. P. Appell <sup>(3)</sup>.

On rapporte les équations du mouvement d'Euler à des axes mobiles <sup>(4)</sup> en remplaçant les projections des accélérations sur les axes fixes par leurs projections sur les axes mobiles, d'après les formules de Bour <sup>(5)</sup>. Nous étudions dans le premier Chapitre du présent travail, les modifications que subissent les principales formules de l'Hydrodynamique en raison de cette substitution. Dans le dernier paragraphe de ce Chapitre, nous démontrons un théorème de cinématique qui trouve, entre autres, une application dans le problème du mouvement de  $n$  corps solide dans un fluide parfait incompressible.

Nous démontrons dans le deuxième Chapitre, quelques propositions générales sur la résistance des fluides visqueux incompressibles. On met actuellement à la base de l'étude de la résistance des fluides réels le théorème d'Euler <sup>(6)</sup>. Ce théorème se rapporte au

---

<sup>(1)</sup> *Bulletin de l'Institut aérodynamique de Koutchino*, 1912, fasc. IV, p. 79-85.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 9 novembre 1908.

<sup>(3)</sup> *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 11 avril 1921.

<sup>(4)</sup> G. GREENHILL, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1880, t. 2, p. 4; H. LAMB, *Hydrodynamics*, 1916, p. 12.

<sup>(5)</sup> *Journal de Liouville*, 2<sup>e</sup> série, 1863, t. 4; G. KOENIGS, *Leçons de Cinématique*, 1897, p. 130.

<sup>(6)</sup> N. JUKOWSKI, *Aérodynamique*, 1916, p. 12.

mouvement permanent d'un fluide parfait. Il nous avait paru important de déduire des propositions qui se rapprochent davantage, des conditions qui déterminent les mouvements des fluides réels.

Nous abordons dans le troisième Chapitre l'étude du problème du mouvement de  $n$  corps solides dans un liquide parfait incompressible. W. Thomson (Lord Kelvin) a établi les équations dynamiques du mouvement d'un ou de plusieurs corps transpercés dans un liquide incompressible, animé d'un mouvement cyclique irrotationnel, en considérant les circulations  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ , à travers les ouvertures pratiquées dans les corps, comme des quantités de mouvements généralisées correspondant à certains paramètres ignorés et en appliquant les équations de Lagrange. Cette méthode souleva des objections <sup>(1)</sup>. L'application directe des équations de Lagrange à un système matériel présentant un nombre infini de degrés de liberté devait être justifiée. L'identification des paramètres à ignorer apparaissait comme très délicate. M. H. Lamb <sup>(2)</sup> perfectionna cette démonstration en appliquant directement le principe d'Hamilton.

M. G.-H. Bryan <sup>(3)</sup> obtint les équations de W. Thomson dans le cas du mouvement d'un seul solide transpercé dans un fluide illimité en utilisant, pour calculer la pression et le couple résultants, l'équation de pression. Cette dernière méthode peut être considérée comme la plus directe et la plus naturelle, mais elle n'a pas été appliquée au cas général.

Les équations de W. Thomson sont déduites dans la supposition que l'on peut rendre le volume occupé par le fluide simplement connexe en traçant dans les solides transpercés des cloisons déterminées, invariablement liées aux solides respectifs. Cette restriction limite considérablement l'application de ces formules, car elles ne peuvent pas être utilisées dans le cas où il y a circulation, non seulement à travers les ouvertures que présentent les corps, mais aussi autour des corps dont la position relative peut varier. C'est ce motif qui détermine la nécessité d'une démonstration spéciale, indépen-

---

<sup>(1)</sup> Pour la bibliographie de ces travaux, voir l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. 4, vol. 5, fasc. II.

<sup>(2)</sup> *Hydrodynamics*, Chap. VI, n° 439.

<sup>(3)</sup> *Philosophical Magazine*, avril 1893.

dante des équations de Thomson, dans le cas du problème de Joukowski (1) du mouvement rectiligne uniforme plan d'un seul solide dans un fluide incompressible illimité, animé d'un mouvement cyclique irrotationnel autour de ce corps.

Nous démontrons dans le présent travail que les équations de Thomson sont applicables non seulement aux corps perforés, mais également dans le cas où il y aurait circulation autour des corps. Les théorèmes de Thomson et de Joukowski apparaissent ainsi comme des cas particuliers de ce théorème plus général. Nous calculons la force et le couple résultants agissant sur l'un quelconque des  $n$  corps en appliquant l'équation de pression rapportée à des axes mobiles, invariablement liés à ce corps.

Nous donnons dans le dernier Chapitre de ce travail une application de ces équations générales au problème du mouvement cyclique plan d'un liquide autour d'un solide qui se meut parallèlement à une paroi rectiligne (2). Ce problème a aussi été traité d'une façon très intéressante, mais d'un autre point de vue, par M. H. Villat (3). Nous étudions en détail le cas particulier où le contour de l'obstacle est une circonférence.

## CHAPITRE PREMIER

### Équations du mouvement d'un fluide rapportées à des axes mobiles

1. *Vitesses et accélérations.* — Soit  $Oxyz$  un trièdre mobile dont le mouvement est défini par les composantes  $u_0, v_0, \omega_0$ , de la vitesse absolue de l'origine  $O$  et les composantes  $p, q, r$  de la rotation instan-

---

(1) *Bulletin de l'Institut aérodynamique de Koutchino*, 1906, fasc. I, p. 54;  
H. LAMB, *Hydrodynamics*, 1916, n° 371.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 4 juillet 1921.

(3) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 14 février 1921.

tanée du trièdre suivant les axes  $Ox, y, z$ . Les projections  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  de la vitesse d'entraînement  $\bar{W}$  sur ces mêmes axes, en un point  $M(x, y, z)$ , sont

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{u} = u_0 + qz - ry, \\ \bar{v} = v_0 + rx - pz, \\ \bar{w} = w_0 + py - qx. \end{cases}$$

Considérons le mouvement relatif d'un fluide par rapport au trièdre mobile  $Oxyz$ . En désignant par  $u, v, w$  les projections de la vitesse absolue  $W$  sur les axes  $Ox, y, z$  et par  $u', v', w'$  les projections de la vitesse relative  $W'$  sur ces mêmes axes d'un élément fluide placé au point  $M$ , on a

$$(2) \quad \begin{cases} u = u' + \bar{u}, \\ v = v' + \bar{v}, \\ w = w' + \bar{w}. \end{cases}$$

Les vitesses  $u, v, w$  sont des fonctions des coordonnées  $x, y, z$  déterminant la position du point  $M$  et du temps  $t$ . Désignons par  $x_1, y_1, z_1$ , les coordonnées absolues du point  $M$  et  $u_1, v_1, w_1$ , les projections de la vitesse absolue  $W$  sur les axes  $Ox_1, y_1, z_1$ , que nous considérons comme fixes dans l'espace. Nous admettons que  $u_1, v_1, w_1$  sont exprimées en fonction des coordonnées absolues  $x_1, y_1, z_1$  et du temps  $t$ .

En supposant, on est autorisé de le faire, qu'au moment actuel la direction des axes des trièdres  $Oxyz$  et  $O_1x_1y_1z_1$  coïncident, on a

$$(3) \quad \begin{cases} u(x, y, z, t) = u_1(x_1, y_1, z_1, t), \\ v(x, y, z, t) = v_1(x_1, y_1, z_1, t), \\ w(x, y, z, t) = w_1(x_1, y_1, z_1, t), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial w_1}{\partial y_1} = \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial v_1}{\partial z_1} = \frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

et, pour les composantes de l'accélération,

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \frac{du}{dt} + qw - rv = \frac{\partial u}{\partial x} u' + \frac{\partial u}{\partial y} v' + \frac{\partial u}{\partial z} w' + \frac{\partial u}{\partial t} + qw - rv, \\ \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv}{dt} + ru - pw = \frac{\partial v}{\partial x} u' + \frac{\partial v}{\partial y} v' + \frac{\partial v}{\partial z} w' + \frac{\partial v}{\partial t} + ru - pw, \\ \frac{dw_1}{dt} = \frac{dw}{dt} + pv - qu = \frac{\partial w}{\partial x} u' + \frac{\partial w}{\partial y} v' + \frac{\partial w}{\partial z} w' + \frac{\partial w}{\partial t} + pv - qu. \end{cases}$$

Ce sont ces expressions qu'il faut substituer dans les équations du mouvement d'Euler pour les rapporter à des axes mobiles.

En tenant compte des relations (1), (2), (3), (4), on peut transformer les équations (5) comme suit :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{w} \right) + qw - rv + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{dv_1}{dt} = - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial v}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial v}{\partial z} \bar{w} \right) + ru - pw + \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{dw_1}{dt} = - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial w}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial w}{\partial z} \bar{w} \right) + pv - qu + \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} qw - rv &= - \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right), \\ ru - pw &= - \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right), \\ pv - qu &= - \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

on peut aussi écrire

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} (u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w}) + 2(\bar{v}\zeta - \bar{w}\eta) + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{dv_1}{dt} = - \frac{\partial}{\partial y} (u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w}) + 2(\bar{w}\xi - \bar{u}\zeta) + \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{dw_1}{dt} = - \frac{\partial}{\partial z} (u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w}) + 2(\bar{u}\eta - \bar{v}\xi) + \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

$\xi, \eta, \zeta$  expriment les composantes du vecteur tourbillon.

Notons encore le relation

$$(8) \quad \mathbf{W}^2 = \mathbf{W}'^2 - \bar{\mathbf{W}}^2 + 2(u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w}).$$

2. *Transformation des équations du mouvement de Helmholtz.* — Les formules que nous avons obtenues dans le paragraphe précédent permettent de rapporter facilement les équations de l'Hydrodynamique à des axes mobiles. On transformera les dérivées prises par rapport aux coordonnées en utilisant les relations (4) et les dérivées prises par rapport au temps en utilisant les équations (6) ou (7). On remarquera aussi que l'on a, pour les dérivées de la pression  $p$ , en supposant qu'au moment actuel les directions des axes  $Ox_1, y_1, z_1$  et  $Ox, y, z$  coïncident, les relations

$$(1) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial z_1}.$$

Transformons ainsi, par exemple, les équations du mouvement d'un fluide parfait sous la forme donnée par Helmholtz :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} &= X_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} W^2 \right) - 2(\eta_1 v_1 - \zeta_1 v_1) - \frac{\partial u_1}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} &= Y_1 - \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{1}{2} W^2 \right) - 2(\zeta_1 u_1 - \xi_1 w_1) - \frac{\partial v_1}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} &= Z_1 - \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{1}{2} W^2 \right) - 2(\xi_1 v_1 - \eta_1 u_1) - \frac{\partial w_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

En raison des équations (1) du présent paragraphe et des équations (2), (4), (7), (8) du paragraphe 1, on n'obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (W'^2 - \overline{W}^2) - 2(\eta w' - \zeta v') - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (W'^2 - \overline{W}^2) - 2(\zeta u' - \xi w') - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (W'^2 - \overline{W}^2) - 2(\xi v' - \eta u') - \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

En supposant que les forces  $X, Y, Z$ , agissant sur l'unité de masse, dérivent d'une fonction de forces  $U$ , que la densité  $\rho$  est fonction de la pression  $p$ , et en désignant par  $H$  l'expression

$$(3) \quad H = \frac{1}{2} (W'^2 - \overline{W}^2) + \int \frac{dp}{\rho} - U,$$

on peut représenter les équations (2) comme suit :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 2(\xi v' - \eta w') - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = 2(\xi w' - \zeta u') - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 2(\eta u' - \xi v') - \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

3. *Équation de continuité.* — Pour rapporter aux axes mobiles l'équation de continuité

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0,$$

remarquons que, si l'on considère la densité comme fonction des coordonnées mobiles  $x, y, z$  et du temps  $t$ ,

$$\rho_1(x_1, y_1, z_1, t) = \rho(x, y, z, t),$$

et

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}$$

et, par conséquent, si l'on tient compte des formules (4) du paragraphe 1, on peut écrire

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

L'équation de continuité rapportée aux axes mobiles conserve la même forme que lorsqu'elle est rapportée à des axes fixes.

En remarquant que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0,$$

on a dans le cas d'un fluide incompressible

$$(2) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

4. *Tourbillons et circulations.* — En désignant  $\xi, \eta, \zeta$  les composantes du tourbillon absolu  $\Omega$  au point  $M(x, y, z)$  par rapport aux

axes mobiles  $Ox, y, z$ ,

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \eta &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

et par  $\xi', \eta', \zeta'$  les composantes du tourbillon relatif  $\Omega'$  par rapport aux mêmes axes

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \right), \\ \eta' &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'} \right), \\ \zeta' &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right),\end{aligned}$$

on peut écrire, en raison des équations (1) et (2) du paragraphe 1,

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \xi' + p, \\ \eta = \eta' + q, \\ \zeta = \zeta' + r, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z} = 0.$$

En désignant les circulations absolues, relative et d'entraînement respectivement par

$$\begin{aligned}x &= \int_L u dx + v dy + w dz, \\ x' &= \int_L u' dx + v' dy + w' dz, \\ \bar{x} &= \int_L \bar{u} dx + \bar{v} dy + \bar{w} dz,\end{aligned}$$

on a, d'après les formules (2) du paragraphe 1,

$$(3) \quad x = x' + \bar{x}$$

et, d'après le théorème de Stokes,

$$(4) \quad \begin{cases} x = 2 \int \int_S \Omega_n d\sigma, \\ x' = 2 \int \int_S \Omega'_n d\sigma, \\ \bar{x} = 2 \int \int_S \bar{\Omega}_n d\sigma, \end{cases}$$

où S est une surface simplement connexe limitée par le contour L.  $\Omega_n, \Omega'_n, \bar{\Omega}_n$  expriment les projections des vecteurs  $\Omega, \Omega'$  et  $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$  sur la normale à l'élément  $d\sigma$  de la surface S. En raison des équations (2) on trouve aussi, en appliquant le théorème de Green, que le flux de tourbillon absolu, relatif et d'entraînement à travers une surface fermée tracée dans le fluide est nul.

En éliminant la fonction H entre la seconde et la troisième des équations (4) du paragraphe 2 à l'aide de la relation

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0,$$

on obtient l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\xi v' - \eta u') - \frac{\partial}{\partial z} (\xi u' - \zeta w') = 0.$$

Transformons cette équation en tenant compte de l'équation de continuité et de l'équation (2) comme on le fait pour déduire les équations de Helmholtz (1), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\xi}{\rho} \right) = \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial u'}{\partial z}$$

et, par un calcul analogue,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\eta}{\rho} \right) &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial v'}{\partial z}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\zeta}{\rho} \right) &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial w'}{\partial z}. \end{aligned}$$

(1) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 3, 1921, p. 357.

En raison des relations

$$\begin{aligned} u' &= u - \bar{u}, & v' &= v - \bar{v}, & w' &= w - \bar{w}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = p, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = q, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = r, \end{aligned}$$

on peut transformer les expressions que nous venons d'obtenir, comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\xi}{\rho} \right) + q \frac{\xi}{\rho} - r \frac{\eta}{\rho} &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\eta}{\rho} \right) + r \frac{\xi}{\rho} - p \frac{\xi}{\rho} &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\xi}{\rho} \right) + p \frac{\eta}{\rho} - q \frac{\xi}{\rho} &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Les premières parties de ces équations expriment les projections de l'accélération rotatoire absolue, rapportée à l'unité de masse, sur les axes mobiles.

Calculons la dérivée par rapport au temps de la circulation

$$\kappa = \int_L u \delta x + v \delta y + w \delta z$$

prise le long d'une courbe L;  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  expriment les projections sur les axes mobiles d'un élément  $\delta s$  de cette courbe. Lorsque  $t$  varie, la courbe L, qu'on suppose tracée toujours par les mêmes particules fluides, change de position en se déformant;  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  varient, par conséquent, avec le temps en même temps que  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . En désignant par  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  les coordonnées des deux bouts de l'élément  $\delta s$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= \frac{d}{dt} (x_2 - x_1) = u'_2 - u'_1 = \frac{\partial u'}{\partial s} ds, \\ \frac{d}{dt} \delta y &= \frac{\partial v'}{\partial s} ds, & \frac{d}{dt} \delta z &= \frac{\partial w'}{\partial s} ds. \end{aligned}$$

En raison de ces relations, nous pouvons écrire,

$$(5) \quad \frac{dz}{dt} = \int_0^s \left( \frac{du}{dt} \frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dt} \frac{dy}{ds} + \frac{dw}{dt} \frac{dz}{ds} + u \frac{du'}{ds} + v \frac{dv'}{ds} + w \frac{dw'}{ds} \right) \delta s.$$

D'après les équations du mouvement d'Euler rapportées à des axes mobiles :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( U - \int \frac{dp}{\rho} \right) - qv + rv, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( U - \int \frac{dp}{\rho} \right) - ru + pw, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( U - \int \frac{dp}{\rho} \right) - pv + qu \end{aligned}$$

et en remarquant que [(1), (2), § 1],

$$\begin{aligned} \frac{du'}{ds} &= \frac{du}{ds} - q \frac{dz}{ds} + r \frac{dy}{ds}, \\ \frac{dv'}{ds} &= \frac{dv}{ds} - r \frac{dx}{ds} + p \frac{dz}{ds}, \\ \frac{dw'}{ds} &= \frac{dw}{ds} - p \frac{dy}{ds} + q \frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$

on peut transformer l'expression (5) comme suit :

$$\frac{dz}{dt} = \int_0^s \frac{d}{ds} \left( U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) \delta s.$$

Le théorème de Thomson conserve la même forme que lorsque les axes sont immobiles. Si l'intégrale est prise le long d'une courbe fermée, elle est nulle et l'on a (1), par conséquent, en raison des relations (3) et (4),

$$\frac{dz'}{dt} = -2 \frac{d}{dt} \int \int_s \bar{\Omega}_n d\sigma.$$

5. *Transformation des formules de H. Lamb et de Beltrami.* — Supposons que le mouvement absolu du fluide est permanent par

---

(1) Voir aussi l'article de M. Bierkness (*Fluides Baroclines*) dans le troisième volume du *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Appell (p. 574).

rapport aux axes mobiles

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

et que le mouvement des axes mobiles est uniforme

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = 0.$$

En raison des relations (2) du paragraphe 1, le mouvement relatif du fluide sera également permanent

$$(2) \quad \frac{\partial u'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial t} = 0.$$

Les équations (4) du paragraphe 2 deviennent

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 2(\xi v' - \eta w') = 2\Omega W' \sin \widehat{\Omega W'} \cos \lambda, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 2(\xi w' - \zeta u') = 2\Omega W' \sin \widehat{\Omega W'} \cos \mu, \\ \frac{\partial H}{\partial z} = 2(\eta u' - \zeta v') = 2\Omega W' \sin \widehat{\Omega W'} \cos \nu. \end{cases}$$

$\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$  sont les cosinus directeurs de la normale au plan qui contient les vecteurs  $\Omega$  et  $W'$ .

Les équations différentielles des lignes de tourbillons dans le mouvement absolu et des lignes de courant dans le mouvement relatif sont

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{ds}{\Omega}, \\ \frac{dx}{u'} = \frac{dy}{v'} = \frac{dz}{w'} = \frac{ds}{W'}, \end{cases}$$

En raison des conditions (1) et (2), les équations (4) sont indépendantes de  $t$ .

En multipliant les équations (3) respectivement par  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  et par  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  et en les ajoutant, on a

$$(5) \quad \begin{cases} u' \frac{\partial H}{\partial x} + v' \frac{\partial H}{\partial y} + w' \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \\ \xi \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial y} + \zeta \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Les équations (5) et (4) font voir que, si le mouvement du fluide est permanent par rapport aux axes mobiles, animées d'un mouvement uniforme, les surfaces  $H = \text{const.}$  contiennent une infinité de lignes de courant et une infinité de lignes de tourbillons. En désignant par  $\delta n$  un élément de la normale à l'une de ces surfaces, nous avons, d'après les formules (3),

$$(6) \quad \frac{\partial H}{\partial n} = 2\Omega W' \sin \widehat{\Omega W'}.$$

Cette expression correspond à la condition de M. H. Lamb <sup>(1)</sup> de la permanence d'un mouvement fluide rapporté à des axes fixes.

Dans un domaine où  $H$  a une valeur constante, mais  $\Omega \neq 0$ ,  $W' \neq 0$ , on doit avoir  $\sin \widehat{\Omega W'} = 0$ . Les lignes de tourbillons absolus se confondent avec les trajectoires du mouvement relatif

$$(7) \quad \frac{\xi}{u'} = \frac{\eta}{v'} = \frac{\zeta}{w'} = \frac{\Omega}{W'}.$$

En remplaçant, dans l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

$\xi, \eta, \zeta$  par  $\frac{\Omega}{W'} u', \frac{\Omega}{W'} v', \frac{\Omega}{W'} w'$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Omega}{W'} \right) u' + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\Omega}{W'} \right) v' + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Omega}{W'} \right) w' + \frac{\Omega}{W'} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0$$

ou, en tenant compte de l'équation de continuité (§ 3)

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

et en remarquant que, vu la permanence du mouvement absolu et relatif par rapport aux axes mobiles,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Omega}{W'} \right) = 0,$$

---

<sup>(1)</sup> *Hydrodynamics*, p. 235.

on obtient

$$(8) \quad \frac{\Omega}{W\rho} = \text{const.}$$

le long de chaque trajectoire du mouvement relatif considéré. Les formules (7) et (8) correspondent à celles qu'avait obtenues Beltrami <sup>(1)</sup> pour les mouvements permanents par rapport à des axes fixes <sup>(2)</sup>.

6. *Équation de pression.* — Si le mouvement du fluide est irrotationnel, les vitesses  $u, v, w$  dérivent d'un potentiel  $\varphi(x, y, z, t)$ . En remplaçant  $u, v, w$  par  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ , on peut représenter les équations (4) du paragraphe 2 comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Pi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \Pi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Pi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et, en effectuant l'intégration, on obtient [(3), § 2)]

$$(1) \quad \int \frac{dp}{\rho} - U + \frac{1}{2} W'^2 - \frac{1}{2} \overline{W}^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Nous avons fait rentrer la fonction arbitraire du temps dans  $\varphi$ .

On peut aussi obtenir cette intégrale directement de l'intégrale de Lagrange

$$(2) \quad \int \frac{dp}{\rho} - U + \frac{1}{2} W^2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = 0,$$

en raisonnant comme suit. En effectuant une transformation de coordonnées, on a

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1, z_1, t) &= \varphi(x, y, z, t) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} v + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} w + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} u' + \frac{\partial\varphi}{\partial y} v' + \frac{\partial\varphi}{\partial z} w' + \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

En admettant qu'au moment initial, qui coïncide avec le moment

<sup>(1)</sup> P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 3, p. 411.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 700.

considéré, la direction des axes mobiles coïncide avec celle des axes fixes, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w.\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -(u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

En substituant cette valeur dans l'intégrale (2), on obtient, en raison de la formule [(8, §1)], l'intégrale (1).

En supposant que le fluide est incompressible, on obtient comme équation de pression rapportée à des axes mobiles

$$(3) \quad \frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - U + \frac{1}{2} \bar{W}^2 - \frac{1}{2} W'^2$$

et, si le mouvement est permanent par rapport à ces axes,

$$\frac{p}{\rho} = -U + \frac{1}{2} \bar{W}^2 - \frac{1}{2} W'^2 + \text{const.}$$

M. H. Lamb <sup>(1)</sup> donne, pour exprimer l'équation de pression rapportée à des axes mobiles, la formule suivante (nous employons nos notations)

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - U - \frac{1}{2} [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + (w - w_0)^2] \\ + p(yw - zv) + q(zu - xw) + z(xv - yu).\end{aligned}$$

Cette formule peut être ramenée à la formule (3) par l'addition du terme  $\frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)$  qui est constant dans tout le domaine considéré et peut rentrer, par conséquent, dans  $\varphi$ .

7. *Théorème de Bernoulli dans le mouvement relatif.* — Supposons que le mouvement absolu est permanent par rapport aux axes

---

<sup>(1)</sup> *Hydrodynamics*, p. 19.

mobiles qui se meuvent uniformément, mais les vitesses ne dérivent pas d'un potentiel. Les équations (4) du paragraphe 2 deviennent

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 2(\xi v' - \eta w'), \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 2(\xi w' - \zeta u'), \\ \frac{\partial H}{\partial z} = 2(\eta u' - \zeta v'). \end{cases}$$

Le mouvement des axes étant uniforme, le mouvement relatif est aussi permanent (§ 5). Les lignes de courant du mouvement relatif se confondent à un instant quelconque avec les trajectoires. En désignant par  $ds$  l'élément d'une trajectoire, on a comme équation différentielle de cette trajectoire

$$(2) \quad \frac{dx}{u'} = \frac{dy}{v'} = \frac{dz}{w'} = \frac{ds}{W'}.$$

En multipliant les équations (1) respectivement, par  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  en les additionnant, et en prenant en considération les équations (2), on obtient

$$W' \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) = 0.$$

La grandeur  $H$  ne varie pas le long d'un filet fluide dans le mouvement relatif considéré.

$$(3) \quad \int \frac{dp}{\rho} = U + \frac{1}{2} W'^2 - \frac{1}{2} \overline{W}^2 = C.$$

$C$  a une valeur constante le long de chaque filet, mais peut varier d'un filet à un autre. L'intégrale (3) exprime le théorème de Bernoulli dans le mouvement relatif.

Si les forces agissant sur l'unité de masse ne dérivent pas d'un potentiel, on peut représenter la formule (3) comme suit :

$$(4) \quad \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} W'^2 - \frac{1}{2} \overline{W}^2 = \int_0^s \left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds + C,$$

où  $s$  est l'arc de la trajectoire considérée comptée à partir d'un point déterminé de cette trajectoire.

8. *Sur un théorème de Cinématique.* — Démontrons un théorème de Cinématique que nous devons utiliser dans l'un des prochains Chapitres. Référons le trièdre mobile  $Oxyz$  à un trièdre  $O, x_1, y_1, z_1$ , considéré comme immobile dans l'espace. Désignons par  $a, b, c$  et  $u_1, v_1, w_1$  les coordonnées et les projections sur les axes fixes de la vitesse absolue de l'origine  $O$ .

Les cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes sont donnés par le Tableau suivant :

|        | $x.$        | $y.$    | $z.$    |
|--------|-------------|---------|---------|
| $x_1.$ | $\lambda$   | $\mu$   | $\nu$   |
| $y_1.$ | $\lambda_1$ | $\mu_1$ | $\nu_1$ |
| $z_1.$ | $\lambda_2$ | $\mu_2$ | $\nu_2$ |

Désignons par  $p, q, r$  et  $p_1, q_1, r_1$  les projections de la rotation instantanée du trièdre mobile  $Oxyz$  sur les axes  $Ox, y, z$  et  $O, x_1, y_1, z_1$  respectivement.

Nommons  $\overline{u}_0, \overline{v}_0, \overline{w}_0$  les projections sur les axes  $Ox, y, z$  de la vitesse d'entraînement en supposant que l'origine  $O$  est immobile

$$\begin{aligned}\overline{u}_0 &= qz - ry \\ \overline{v}_0 &= rx - pz \\ \overline{w}_0 &= py - qx.\end{aligned}$$

Les projections de la vitesse d'entraînement  $\overline{W}$  sur les axes fixes seront, par conséquent,

$$\begin{aligned}\overline{u}_1 &= u_1 + \overline{u}_0 \lambda + \overline{v}_0 \eta + \overline{w}_0 \nu \\ \overline{v}_1 &= v_1 + \overline{u}_0 \lambda_1 + \overline{v}_0 \eta_1 + \overline{w}_0 \nu_1 \\ \overline{w}_1 &= w_1 + \overline{u}_0 \lambda_2 + \overline{v}_0 \eta_2 + \overline{w}_0 \nu_2.\end{aligned}$$

Si les axes mobiles sont, au moment actuel, parallèles aux axes fixes, on peut écrire

$$\begin{aligned}\overline{u}_0 &= q_1(z_1 - c) - r_1(y_1 - b) \\ \overline{v}_0 &= r_1(x_1 - a) - p_1(z_1 - c) \\ \overline{w}_0 &= p_1(y_1 - b) - q_1(x_1 - a).\end{aligned}$$

Désignons par  $\overline{W}_n$  la projection de la vitesse d'entraînement  $\overline{W}$  au point  $P(x_1, y_1, z_1)$  sur une direction PN dont les cosinus directeurs par rapport aux axes fixes sont  $l_1, m_1, n_1$  et par rapport aux axes mobiles  $l, m, n$ ,

$$\overline{W}_n = u_1 l_1 + v_1 m_1 + w_1 n_1 + \overline{u}_0 l + \overline{v}_0 m + \overline{w}_0 n.$$

Si les axes  $Ox, y, z$  sont parallèles aux axes  $O_1 x_1, y_1, z_1$ , on a évidemment

$$l = l_1, \quad m = m_1, \quad n = n_1.$$

Supposons que les directions des axes  $Ox, y, z$  et  $O_1 x_1, y_1, z_1$  coïncident et calculons la variation  $\delta \overline{W}_n$  de la vitesse  $\overline{W}_n$  au point  $P(x_1, y_1, z_1)$  lorsqu'on donne un accroissement  $\delta a$  à la coordonnée  $a$  de l'origine  $O$  des axes mobiles

$$\delta \overline{W}_n = \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial a} \delta a = (q_1 n_1 - r_1 m_1) \delta a$$

$$(1) \quad \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial a} = q_1 n_1 - r_1 m_1.$$

On obtient de même

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial b} = r_1 l_1 - p_1 n_1, \\ \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial c} = p_1 m_1 - q_1 l_1 \end{cases}$$

et, en faisant varier les vitesses  $u_1, v_1, w_1$ ,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial u_1} = l_1, \\ \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial v_1} = m_1, \\ \frac{\partial \overline{W}_n}{\partial w_1} = n_1. \end{cases}$$

Pour exprimer la variation  $\delta \overline{W}_n$  de la vitesse  $\overline{W}_n$  au point  $P(x_1, y_1, z_1)$  lorsqu'on fait tourner le trièdre  $Oxyz$  autour de l'axe  $Ox$ , en supposant qu'elle est parallèle à l'axe  $O_1 x_1$ , d'un angle  $\delta \alpha$ , en considé-

rant  $p, q, r$  comme des constantes, remarquons d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} \partial\gamma &= z \partial\alpha = (z_1 - c) \partial\alpha, & \partial z &= -\gamma \partial\alpha = -(y_1 - b) \partial\alpha; \\ \partial m &= n \partial\alpha = n_1 \partial\alpha, & \partial n &= -m \partial\alpha = -m_1 \partial\alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(3) \quad \begin{cases} \delta \bar{W}_n = [(y_1 - b)(p_1 m_1 - q_1 l_1) - (z_1 - c)(r_1 l_1 - p_1 n_1) + \bar{v}_0 n_1 - \bar{w}_0 m_1] \delta\alpha, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial \alpha} = (y_1 - b)(p_1 m_1 - q_1 l_1) - (z_1 - c)(r_1 l_1 - p_1 n_1) + \bar{v}_0 n_1 - \bar{w}_0 m_1. \end{cases}$$

On obtient de même

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial \beta} = (z_1 - c)(q_1 n_1 - r_1 m_1) - (x_1 - a)(p_1 m_1 - q_1 l_1) + \bar{w}_0 l_1 - \bar{u}_0 n_1, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial \gamma} = (x_1 - a)(r_1 l_1 - p_1 n_1) - (y_1 - b)(q_1 n_1 - r_1 m_1) + \bar{u}_0 m_1 - \bar{v}_0 l_1, \end{cases}$$

et en faisant varier les composantes  $p, q, r$  de la rotation instantanée du trièdre mobile

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial p} = \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial p_1} = (y_1 - b) n_1 - (z_1 - c) m_1, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial q} = \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial q_1} = (z_1 - c) l_1 - (x_1 - a) n_1, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial r} = \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial r_1} = (x_1 - a) m_1 - (y_1 - b) l_1. \end{cases}$$

Si l'on représente la vitesse  $\bar{W}_n$  sous la forme

$$\bar{W}_n = \bar{u}_1 l_1 + \bar{v}_1 m_1 + \bar{w}_1 n_1,$$

on doit prendre en considération, en donnant des accroissements  $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$  aux angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , que les cosinus directeurs  $l_1, m_1, n_1$  restent invariables. Les résultats qu'on obtient ainsi doivent évidemment coïncider avec les formules (3), (3').

Calculons les dérivées par rapport au temps des expressions (2) et (4) en supposant que le point P, dont les coordonnées absolues au moment initial étaient  $x_1, y_1, z_1$ , et la direction PN, sont assujettis au trièdre mobile  $Oxyz$  dont les axes sont, au

moment initial, parallèles à ceux du trièdre  $O, x_1, y_1, z_1$ . On aura, dans ce cas,

$$\begin{aligned}\frac{dl_1}{dt} &= q_1 n_1 - r_1 m_1, \\ \frac{dm_1}{dt} &= r_1 l_1 - p_1 n_1, \\ \frac{dn_1}{dt} &= p_1 m_1 - q_1 l_1; \\ \frac{d(x_1 - a)}{dt} &= q_1(z_1 - c) - r_1(y_1 - b), \\ \frac{d(y_1 - b)}{dt} &= r_1(x_1 - a) - p_1(z_1 - c), \\ \frac{d(z_1 - c)}{dt} &= p_1(y_1 - b) - q_1(x_1 - a)\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial u_1} &= q_1 n_1 - r_1 m_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial v_1} &= r_1 l_1 - p_1 n_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial w_1} &= p_1 m_1 - q_1 l_1; \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial p_1} &= (y_1 - b)(p_1 m_1 - q_1 l_1) - (z_1 - c)(r_1 l_1 - p_1 n_1) + \bar{v}_0 n_1 - \bar{w}_0 m_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial q_1} &= (z_1 - c)(q_1 n_1 - r_1 m_1) - (x_1 - a)(p_1 m_1 - q_1 l_1) + \bar{w}_0 l_1 - \bar{u}_0 n_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial r_1} &= (x_1 - a)(r_1 l_1 - p_1 n_1) - (y_1 - b)(q_1 n_1 - r_1 m_1) + \bar{u}_0 m_1 - \bar{v}_0 l_1. \end{aligned} \right.$$

En comparant les équations (5) aux équations (1), (1'), on obtient les relations

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial a} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial u_1}, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial b} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial v_1}, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial c} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial w_1}, \end{aligned} \right.$$

et en comparant les équations (6) aux équations (3), (3'),

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial p_1}, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial \beta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial \gamma} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial r_1}. \end{array} \right.$$

Les expressions (7) et (8) constituent le théorème que nous nous proposons de démontrer.  $\bar{W}_n$  est la projection de la vitesse d'entraînement  $\bar{W}$  au point P, invariablement lié aux axes mobiles, sur la direction PN, fixe par rapport à ces mêmes axes.  $u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1$  sont les projections sur les axes fixes dans l'espace des vitesses instantanées de glissement et de rotation du trièdre mobile;  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  sont les paramètres correspondants déterminant la position du trièdre mobile.

## CHAPITRE II

### Sur la résistance des fluides visqueux incompressibles

1. *Théorème des projections des quantités de mouvement.* — Considérons la première des équations de Navier en la rapportant à des axes mobiles et en supposant que le fluide est incompressible et les forces agissant sur l'unité de masse nulles,

$$(1) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u = \frac{du_1}{dt}.$$

La dérivée  $\frac{du_1}{dt}$  qui figure dans cette équation s'exprime [voir les formules (5) de la page 58], comme suit :

$$(2) \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u' + \frac{\partial u}{\partial y} v' + \frac{\partial u}{\partial z} w' + (qw - rv) + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

En raison de la formule (1) et de l'équation de continuité, nous

pouvons écrire

$$-\int \int \int_V \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u - \mu \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] d\tau \\ = \rho \int \int \int_V \left( \frac{du}{dt} + qv - rv \right) d\tau.$$

Les intégrales s'étendent à tous les éléments du volume V extérieur à la surface fermée S<sub>1</sub> et intérieur à la surface fermée S<sub>2</sub>.

En appliquant le théorème de Green à la première partie, on obtient

$$-\int \int_{S_1} \left[ pl - \mu \frac{\partial u}{\partial v} - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} u \right) \right] d\sigma \\ - \int \int_{S_2} \left[ pl - \mu \frac{\partial u}{\partial v} - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} u \right) \right] d\sigma,$$

$l, m, n$  sont les cosinus directeurs de la normale  $n$  à un élément  $d\sigma$  des surfaces S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub> dirigée vers l'extérieur du volume V.

Cette intégrale exprime la projection sur l'axe Ox de la résultante des pressions hydrodynamiques et des forces tangentielles de frottement sur la surface négative des surfaces S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>. En effet, la projection sur l'axe Ox de l'effort élémentaire agissant sur la face négative d'un élément  $d\sigma$  est

$$p_{nx} d\sigma = (l p_{xx} + m p_{yx} + n p_{zx}) d\sigma,$$

où

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$p_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$p_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

et, par conséquent,

$$p_{nx} = -pl + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} u \right) \\ + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} u \right) \\ = -pl + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} u \right).$$

On aurait pu aussi écrire directement, en appliquant les équations

générales du mouvement des milieux continus (1) :

$$(3) \quad \int \int_{S_1} p_{nx} d\sigma + \int \int_{S_2} p_{nx} d\sigma \\ = \rho \int \int \int_V \left( \frac{\partial u}{\partial x} u' + \frac{\partial u}{\partial y} v' + \frac{\partial u}{\partial z} w' + qw - rv + \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\tau.$$

Transformons l'intégrale de volume. En appliquant le théorème de Green et en tenant compte de l'équation de continuité, on a

$$\int \int \int_V \left( \frac{\partial u}{\partial x} u' + \frac{\partial u}{\partial y} v' + \frac{\partial u}{\partial z} w' \right) d\tau \\ = \int \int \int_V \left( \frac{\partial uu'}{\partial x} + \frac{\partial uv'}{\partial y} + \frac{\partial uw'}{\partial z} \right) d\tau \\ = \int \int_{S_1} u(u'l + v'm + w'n) d\sigma + \int \int_{S_2} u(u'l + v'm + w'n) d\sigma$$

et, en faisant cette substitution dans la seconde partie de l'équation (3),

$$\int \int_{S_1} p_{nx} d\sigma + \int \int_{S_2} p_{nx} d\sigma \\ = \rho \int \int_{S_1} u(u'l + v'm + w'n) d\sigma \\ + \rho \int \int_{S_2} u(u'l + v'm + w'n) d\sigma + \rho \int \int \int_V (qw - rv) d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

Admettons que la surface  $S_1$  représente la paroi d'un corps solide qui se meut dans un fluide visqueux incompressible, que les axes mobiles sont invariablement liés au solide et posons

$$P = \int \int_{S_1} p_{nx} d\sigma.$$

On aura sur la paroi  $S_1$ ,

$$u'l + v'm + w'n = 0$$

et, par conséquent,

$$(4) \quad P = - \int \int_{S_2} p_{nx} d\sigma + \rho \int \int_{S_2} u(u'l + v'm + w'n) d\sigma \\ + \rho \int \int \int_V (qw - rv) d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

---

(1) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 3, p. 130.

On obtiendra des équations analogues pour les deux autres composantes Q et R de la résultante des forces agissant sur la paroi du solide.

Si l'on suppose que  $S_2$  est une surface fixe et indéformable limitant extérieurement le fluide on aura sur cette surface,

$$ul + vm + wn = 0$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} P = & - \int \int_{S_2} p_{nx} d\sigma - \rho \int \int_{S_2} u(\bar{u}l + \bar{v}m + \bar{w}n) d\sigma \\ & + \rho \int \int \int_V (qw - rv) d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau. \end{aligned}$$

Si l'on admet que la surface  $S_2$  est une surface fluide qui se déforme en limitant toujours un volume constant et qu'elle n'est soumise extérieurement qu'à une pression uniforme, on aura

$$P = \rho \int \int_{S_2} u(u'l + v'm + w'n) d\sigma + \rho \int \int \int_V (qw - rv) d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

Supposons, enfin, que la surface  $S_2$  est une surface idéale, invariablement liée aux axes mobiles assujettis au solide.

$$u'l + v'm + w'n$$

exprime alors la projection de la vitesse relative du fluide qui s'écoule à travers la surface  $S_2$  sur la normale à un élément  $d\sigma$  de cette surface. Désignons cette vitesse par  $W'_n$ ,

$$W'_n = u'l + v'm + w'n.$$

L'équation (4) devient

$$(5) \quad P = \int \int_{S_2} (-p_{nx} + \rho u W'_n) d\sigma + \rho \int \int \int_V (qw - rv) d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

On obtient de même

$$(5') \quad \begin{cases} Q = \int \int_{S_2} (-p_{ny} + \rho v W'_n) d\sigma + \rho \int \int \int_V (ru - pw) d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial v}{\partial t} d\tau, \\ R = \int \int_{S_2} (-p_{nz} + \rho w W'_n) d\sigma + \rho \int \int \int_V (pv - qu) d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau. \end{cases}$$

Si à un certain moment la direction de l'axe instantanée de rotation coïncide avec l'axe  $Ox$ , on a

$$q = 0, \quad r = 0$$

et, par conséquent, pour cet instant,

$$(6) \quad \begin{cases} P = \int \int_{S_2} (-p_{nx} + \rho u W'_n) d\mathcal{S} + \rho \int \int \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau, \\ Q = \int \int_{S_2} (-p_{ny} + \rho v W'_n) d\mathcal{S} - \rho p \int \int \int_V w d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial v}{\partial t} d\tau, \\ R = \int \int_{S_2} (-p_{nz} + \rho w W'_n) d\mathcal{S} + \rho p \int \int \int_V v d\tau + \rho \int \int \int_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau. \end{cases}$$

Si l'axe de rotation coïncide invariablement avec l'axe  $Ox$ , on pourra appliquer ces formules pendant toute la durée du mouvement.

Dans l'étude de la résistance des fluides réels il advient souvent (pour l'hélice propulsive, par exemple) qu'on peut admettre que, dans un volume restreint  $V$  entourant le solide, le mouvement est permanent par rapport aux axes mobiles. On pourra poser, dans ce cas, dans les formules que nous venons d'obtenir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Si le mouvement est permanent par rapport aux axes mobiles dans le volume  $V$  et le si corps possède un plan de symétrie passant par l'axe de rotation  $Ox$ , on aura, en raison de la symétrie du mouvement,

$$Q = 0, \quad R = 0.$$

Il peut advenir que le mouvement du fluide autour du solide varie périodiquement et que, en désignant par  $t_0$  la durée d'une période

$$\int_0^{t_0} \int \int \int \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\tau dt = 0.$$

On obtient alors, en supposant que l'axe de rotation coïncide avec l'axe  $Ox$ , pour la valeur moyenne de la force  $\bar{P}$ , l'expression sui-

vante :

$$\bar{P} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \iint_{S_2} (-p_{nx} + \rho u W'_n) d\sigma dt.$$

2. *Théorème des moments des quantités de mouvement.* — En employant les notations du paragraphe précédent nous pouvons écrire, d'après les équations générales du mouvement des milieux continus,

$$(1) \quad \begin{aligned} & \iint_{S_1} (y p_{nz} - z p_{ny}) d\sigma \\ & + \iint_{S_2} (y p_{nz} - z p_{ny}) d\sigma = \rho \iiint_V \left( y \frac{dw_1}{dt} - z \frac{dv_1}{dt} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Nous supposons que la surface fermée  $S_1$  coïncide avec la paroi du corps solide et que la surface fermée  $S_2$  est tracée autour de ce solide. Nous nommerons L, M, N les moments des forces agissant sur la paroi du solide par rapport aux axes  $Ox, y, z$ ,

$$L = - \iint_{S_2} (y p_{nz} - z p_{ny}) d\sigma + \rho \iiint_V \left( y \frac{dw_1}{dt} - z \frac{dv_1}{dt} \right) d\tau.$$

En nous rappelant que [(5), p. 58; (2), p. 60], pour un fluide incompressible,

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= \frac{\partial w u'}{\partial x} + \frac{\partial w v'}{\partial y} + \frac{\partial w w'}{\partial z} + p v - q u + \frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v u'}{\partial x} + \frac{\partial v v'}{\partial y} + \frac{\partial v w'}{\partial z} + r u - p w + \frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned}$$

où  $\frac{\partial w}{dt}$  et  $\frac{\partial v}{dt}$  expriment les dérivées par rapport au temps des projections de la vitesse absolue en un point M, invariablement lié aux axes mobiles, sur ces mêmes axes, nous pouvons transformer l'intégrale de volume comme suit :

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} y w u' + \frac{\partial}{\partial y} y w v' + \frac{\partial}{\partial z} y w w' \right) \right. \\ & \quad - \left( \frac{\partial}{\partial x} z v u' + \frac{\partial}{\partial y} z v v' + \frac{\partial}{\partial z} z v w' \right) \\ & \quad \left. + (v w' - w v') + y (p v - q u) - z (r u - p w) + y \frac{\partial w}{\partial t} - z \frac{\partial v}{\partial t} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a [(1), (2), p. 57]

$$v\omega' - \omega v' = -v\bar{\omega} + \omega\bar{v} = v\omega_0 - \omega v_0 + \omega(rx - pz) - v(py - qx)$$

et

$$\begin{aligned} (v\omega' - \omega v') + y(py - qu) - z(ru - pw) \\ = (v\omega_0 - \omega v_0) + r(\omega x - uz) + q(vx - uy). \end{aligned}$$

On obtient en définitive, en appliquant le théorème de Green et en tenant compte de ce que sur la surface du solide

$$u'l + v'm + \omega'n = W'_n = 0,$$

l'expression suivante

$$\begin{aligned} (2) \quad L = \int_{\Sigma_2} [y(-p_{nz} + \rho\omega W'_n) - z(-p_{nz} + \rho v W'_n)] d\sigma \\ + \rho \int \int \int_V [(v\omega_0 - \omega v_0) + r(\omega x - uz) + q(vx - uy)] d\tau \\ + \rho \int \int \int_V \left( y \frac{\partial \omega}{\partial t} - z \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\tau. \end{aligned}$$

On obtiendra de même les deux autres composantes du couple

$$\begin{aligned} M = \int_{\Sigma_2} [z(-p_{nz} + \rho u W'_n) - x(-p_{nz} + \rho \omega W'_n)] d\sigma \\ + \rho \int \int \int_V [(u\omega_0 - \omega u_0) + p(uy - vx) + r(\omega y - vz)] d\tau \\ + \rho \int \int \int_V \left( z \frac{\partial u}{\partial t} - x \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) d\tau, \\ N = \int_{\Sigma_2} [x(-p_{ny} + \rho v W'_n) - y(-p_{nx} + \rho u W'_n)] d\sigma \\ + \rho \int \int \int_V [(vu_0 - uv_0) + q(vz - \omega y) + p(uz - \omega x)] d\tau \\ + \rho \int \int \int_V \left( x \frac{\partial v}{\partial t} - y \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Lorsque l'axe  $Ox$  coïncide avec l'axe instantané de rotation et de glissement

$$\begin{aligned} q &= r = 0, \\ v_0 &= \omega_0 = 0, \end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
 & \int \int \int_V [(wv_0 - vw_0) + r(wv - uz) + q(vv - uy)] d\tau = 0, \\
 & \int \int \int_V [u(wv_0 - vw_0) + p(uy - vx) + r(wy - vz)] d\tau \\
 &= \int \int \int_V [p(uy - vx) - wu_0] d\tau, \\
 & \int \int \int_V [(vu_0 - uv_0) + q(vz - wy) + p(uz - wx)] d\tau \\
 &= \int \int \int_V [p(uz - wx) + vu_0] d\tau,
 \end{aligned}$$

Si le solide est animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme, on pourra appliquer ces formules pendant toute la durée du mouvement.

Lorsqu'en plus le mouvement du fluide dans le volume V est permanent par rapport aux axes mobiles, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
 L &= \int \int_{S_2} [z(-p_{nz} + \rho w W'_n) - z(-p_{nz} + \rho v W'_n)] d\sigma, \\
 M &= \int \int_{S_2} [z(-p_{nx} + \rho u W'_n) - x(-p_{nz} + \rho w W'_n)] d\sigma \\
 &\quad + \rho \int \int \int_V [p(uy - vx) - wu_0] d\tau, \\
 N &= \int \int_{S_2} [x(-p_{ny} + \rho v W'_n) - y(-p_{nz} + \rho u W'_n)] d\sigma \\
 &\quad + \rho \int \int \int_V [p(uz - wx) + vu_0] d\tau.
 \end{aligned}$$

Si le solide est symétrique par rapport à l'axe Ox les couples M et N sont nuls. Dans le cas d'un mouvement périodique du fluide il faudra modifier les formules comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent.

3. *Expression de la puissance. Cas d'un fluide réel à très petit frottement.* — En multipliant les équations (5), (5') du paragraphe 1 et

les équations (2), (2') du paragraphe 2 respectivement par  $u_0, v_0, w_0, p, q, r$ , et en les ajoutant, on obtient comme expression de la puissance

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathcal{Q} &= P n_0 + Q v_0 + R w_0 + L p + M q + N r \\ &= \int \int_{\Sigma} [\bar{u}(-p_{nx} + \rho u W'_n) \\ &\quad + \bar{v}(-p_{ny} + \rho v W'_n) + \bar{w}(-p_{nz} + \rho w W'_n)] d\sigma \\ &\quad + \int \int \int_V \left( \bar{n} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{w} \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Si le mouvement du fluide dans le volume  $V$  est permanent par rapport aux axes mobiles, on peut écrire

$$\mathcal{Q} = \int \int_{\Sigma} [\bar{u}(-p_{nx} + \rho u W'_n) + \bar{v}(-p_{ny} + \rho v W'_n) + \bar{w}(-p_{nz} + \rho w W'_n)] d\sigma.$$

Dans les fluides réels à très petit frottement on peut admettre <sup>(1)</sup> qu'il se forme près des parois du solide une mince couche avec une variation rapide des vitesses selon la normale à la paroi et qu'en dehors de cette couche le mouvement du fluide n'est pas affecté par la viscosité et les vitesses dérivent d'un potentiel.

Appliquons la formule (4) de la page 69. Admettons que les forces  $X, Y, Z$  agissant sur l'unité de masse sont nulles hors de la couche mince et respectivement égales dans cette couche aux membres

$$-\frac{\mu}{\rho} \Delta u', \quad -\frac{\mu}{\rho} \Delta v', \quad -\frac{\mu}{\rho} \Delta w'$$

des équations de Navier.

D'après la formule (4) que nous venons de rappeler, la grandeur  $h$  qui figure dans l'équation

$$p + \frac{1}{2} \rho \mathbf{W}'^2 - \frac{1}{2} \rho \overline{\mathbf{W}}^2 + h = 0$$

est alors constante le long de tous les filets qui ne traversent pas la couche mince susdite. Le long des filets qui traversent cette couche

---

(1) L. PRANDTL, *Verh. d. III. Internat. Math. Kongresses, Heidelberg, 1907.*

la grandeur  $K$  est constante en dehors de la couche, mais elle possède des valeurs différentes avant et après le passage de la couche.

En remarquant que

$$\rho(u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w}) = \frac{1}{2} \rho W^2 + \frac{1}{2} \rho \overline{W^2} - \frac{1}{2} \rho W'^2,$$

et en supposant que la surface idéale  $S_2$  est tracée en dehors de la couche mince où l'on ne peut négliger l'effet des frottements, on aura sur cette surface,

$$\begin{aligned} p_{nx} &= -pl, & p_{ny} &= -pm, & p_{nz} &= -pn, \\ \rho(u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w}) &= \frac{1}{2} \rho W^2 + p + h. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on obtient

$$\mathfrak{Q} = \int \int_{S_2} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho W^2 + p + h \right) W'_n + \rho \overline{W}_n \right] d\sigma.$$

On peut aussi représenter cette formule comme suit

$$\mathfrak{Q} = \int \int_{S_2} \left| \left( \frac{1}{2} \rho W^2 + h \right) W'_n + \rho \overline{W}_n \right| d\sigma.$$

Les formules que nous avons obtenues dans ce Chapitre (1) trouvent de nombreuses applications dans le domaine de la résistance des fluides réels.

### CHAPITRE III

#### Équations générales du mouvement de corps solides dans un fluide parfait incompressible

##### 1. Généralisation de Kelvin du théorème d'Ostrogradski ou de Green.

— Nous devons appliquer dans ce Chapitre, à plusieurs reprises, une proposition qu'on peut désigner comme généralisation de Kelvin du théorème d'Ostrogradski ou de Green. Rappelons sa démonstration (2). Considérons un volume  $V$  à connexion multiple d'ordre  $n$

(1) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 967

(2) H. LAMB, *Hydrodynamics*, p. 52.

et soient  $F(x, y, z)$ ,  $G(x, y, z)$ ,  $H(x, y, z)$  trois fonctions définies en chaque point P du volume V, uniformes ou multiformes, continues et admettant des dérivées partielles du premier ordre. Rendons le volume V simplement connexe à l'aide de  $(n - 1)$  cloisons. Désignons par  $d\sigma$ , un élément de la surface S limitant le volume V, par  $d\sigma_k$  un élément de l'une des cloisons et par  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  les constantes cycliques des fonctions F, G, H correspondant à la cloison  $k$ . En désignant par  $(F_1, F_2)$ ,  $(G_1, G_2)$  et  $(H_1, H_2)$  les valeurs des fonctions F, G, H en deux points infiniment voisins mais situés des deux côtés de la cloison K, on aura

$$F_2 - F_1 = \lambda_k,$$

$$G_2 - G_1 = \mu_k,$$

$$H_2 - H_1 = \nu_k.$$

Les directions des normales  $n_1$  et  $n_2$  à chacun des côtés de l'élément  $d\sigma_k$  sont opposées; en désignant leur cosinus directeur respectivement par  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , on aura

$$\alpha = -\alpha_1, \quad \beta = -\beta_1, \quad \gamma = -\gamma_1,$$

En appliquant maintenant la formule générale d'Ostrogradski (1), on obtiendra

$$\begin{aligned} (1) \quad & \iiint_V \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) d\tau \\ &= \iint_S (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma + \sum_{k=1}^{k=n-1} \iint d\sigma_k (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k + \gamma \nu_k) d\sigma_k. \end{aligned}$$

Si le vecteur W de projection F, G, H est doublement scalaire on peut poser

$$F = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad G = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad H = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Supposons en outre que  $\psi$  est une fonction multiforme et que sa constante cyclique correspondant à la cloison  $k$  est  $\alpha_k$ . La formule (1)

---

(1) P. APPELL, *Éléments d'Analyse mathématique*, 3<sup>e</sup> édition, p. 519.

peut être transformée dans ce cas comme suit

$$(2) \quad \int \int \int_V \psi \Delta \varphi \, d\tau + \int \int \int_V \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau \\ = \int \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma + \sum_{k=1}^{k=n-1} x_k \int \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma_k.$$

En supposant que  $\varphi$  est également une fonction multiforme et en désignant sa constante cyclique qui correspond à la cloison  $k$  par  $x'_k$ , on obtient en permutant  $\psi$  et  $\varphi$  dans la formule (2),

$$(3) \quad \int \int \int_V \varphi \Delta \psi \, d\tau + \int \int \int_V \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau \\ = \int \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\sigma + \sum_{k=1}^{k=n-1} x'_k \int \int \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\sigma_k.$$

Les formules (2) et (3) constituent la généralisation de Lord Kelvin du théorème de Green.

Déduisons encore une formule que nous utiliserons plus bas. En posant dans la formule (1)

$$\mathbf{F} = \varphi \bar{u}, \quad \mathbf{G} = \varphi \bar{v}, \quad \mathbf{H} = \varphi \bar{w};$$

où

$$\bar{u} = u_0 + qz - ry, \\ \bar{v} = v_0 + rx - pz, \\ \bar{w} = w_0 + py - qx$$

en désignant

$$\overline{\mathbf{W}}_n = -(\bar{u}\alpha + \bar{v}\beta + \bar{w}\gamma) = \bar{u}\alpha_1 + \bar{v}\beta_1 + \bar{w}\gamma_1.$$

et en supposant que  $\varphi$  est un potentiel non uniforme et  $u_0, v_0, w_0, p, q, r$  des constantes, nous obtenons

$$(4) \quad \int \int \int_V \left( \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau \\ = - \int \int_S \varphi \overline{\mathbf{W}}_n \, d\sigma - \sum_{k=1}^{k=n-1} x_k \int \int \overline{\mathbf{W}}_n \, d\sigma_k.$$

En supposant dans les formules (2) et (3) que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$

sont harmoniques

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\psi = 0,$$

on aura

$$(5) \quad \begin{aligned} \int \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\tau + \sum_{k=1}^{h=n-1} \alpha_k \int \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\tau_k \\ = \int \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\tau + \sum_{k=1}^{h=n-1} \alpha'_k \int \int \frac{\partial \psi}{\partial n} d\tau_k. \end{aligned}$$

Ces formules permettent d'exprimer facilement, par exemple, l'énergie cinétique d'un fluide dans le cas d'un mouvement cyclique irrotationnel. En posant dans la formule (2)  $\psi = \varphi$  et en supposant que  $\varphi$  est le potentiel des vitesses d'un mouvement fluide, on obtient pour l'énergie cinétique T l'expression suivante

$$(6) \quad \begin{aligned} 2T &= \rho \int \int \int_V \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ &= \rho \int \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\tau + \rho \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \int \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\tau_k. \end{aligned}$$

En posant

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0,$$

où  $\varphi_0$  est un potentiel uniforme et  $\omega_0$  un potentiel non uniforme, dont les constantes cycliques sont  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  et qui satisfait sur toute la surface S limitant le fluide à la condition  $\frac{\partial \omega_0}{\partial n} = 0$ , et en remarquant que, en raison de la formule (5),

$$\int \int_S \varphi_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial n} d\tau = \int \int_S \omega_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \int \int \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\tau_k = 0,$$

on peut transformer l'expression comme suit

$$(7) \quad 2T = \rho \int \int_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\tau + \rho \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \int \int \frac{\partial \omega_0}{\partial n} d\tau_k$$

ou, en désignant l'énergie cinétique du mouvement acyclique par  $\mathfrak{E}$  et celle du mouvement cyclique par  $\mathfrak{X}$ ,

$$(8) \quad T = \mathfrak{E} + \mathfrak{X} \quad (1).$$

---

(1) H. LAMB, *Hydrodynamics*, p. 172.

Notons encore la relation suivante. En éliminant T des expressions (6) et (8) et en se souvenant de la signification de K et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \frac{\partial \omega_0}{\partial n},$$

on obtient

$$(9) \quad 2\mathfrak{C} = \rho \int \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\mathfrak{S} + \rho \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \int \int \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\mathfrak{S}_k.$$

2. *Théorème de Joukowski* <sup>(1)</sup>. — Avant d'entreprendre l'étude du problème général du mouvement de  $n$  corps solides dans un liquide, rappelons la démonstration du théorème de Joukowski du mouvement uniforme à deux dimensions d'un seul solide dans un liquide parfait indéfini lorsqu'il y a circulation

En appliquant l'équation de pression rapportée à des axes mobiles, en remarquant que le mouvement est permanent par rapport à ces axes et en désignant par  $(-U)$  la vitesse de translation du solide, on peut écrire

$$(1) \quad X = \int_L p l ds = \frac{1}{2} \rho \int_L (u^2 + v^2) l ds + \rho U \int_L u l ds,$$

$$(2) \quad Y = \int_L p m ds = \frac{1}{2} \rho \int_L (u^2 + v^2) m ds + \rho U \int_L u m ds.$$

Les intégrales sont prises tout le long du contour L de l'obstacle. En désignant par  $L_1$  une circonférence tracée autour du solide et dont le rayon R est infiniment grand, on a, en appliquant le théorème de Green

$$(3) \quad \frac{1}{2} \int_L (u^2 + v^2) l ds = \iint \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy - \frac{1}{2} \int_{L_1} (u^2 + v^2) l ds;$$

on peut omettre la dernière intégrale, les vitesses étant à l'infini de l'ordre de grandeur de  $R^{-1}$ .

En tenant compte de ce que le mouvement est irrotationnel et de l'équation de continuité, on obtient, en appliquant encore une fois

<sup>(1)</sup> *Loc. cit., ante*, p. 7.

le théorème de Green

$$(4) \iint \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = \iint \left( \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \int_L u (ul + vm) ds + \int_{L_1} u (ul + vm) ds.$$

La dernière intégrale peut être de nouveau omise. En raison des expressions (3) et (4) on peut transformer l'équation (1) comme suit

$$X = \rho \int_L u [ul + vm + Ul] ds.$$

En appliquant un raisonnement analogue à l'équation (2) on obtient

$$Y = \rho \int_L [v (ul + vm) + Um] ds.$$

A la surface du solide on a

$$ul + vm = -Ul$$

et, par conséquent,

$$X = 0,$$

$$Y = -\rho U \int_L (vl - um) ds = \rho U \int_L \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \rho U \alpha,$$

où  $\alpha$  est la circulation autour de l'obstacle.

3. *Remarques préliminaires sur le problème du mouvement de  $n$  corps solides dans un liquide parfait incompressible.* — Considérons  $n$  corps solides qui se meuvent dans un fluide incompressible limité par une surface fermée simplement connexe  $S_0$  <sup>(1)</sup>. La forme des  $n$  corps est arbitraire, ils peuvent être transpercés ou non, s'étendre jusqu'à la paroi ou être complètement entourés par le fluide (*fig. 1*).

Les dimensions de la surface limite  $S_0$  peuvent être infiniment grandes, mais il est toujours indispensable de préciser, si l'on a des

---

(1) Cette restriction n'influe pas sur la généralité du problème, car on peut toujours supposer que l'un ou plusieurs des corps sont immobiles par rapport à la surface  $S_0$  et que les autres corps se meuvent dans le domaine à connexion multiple que l'on obtient ainsi.

solides qui s'étendent jusqu'aux parois, la façon dont on effectue ce passage à l'infini.

Nous supposons que le fluide est animé, indépendamment du

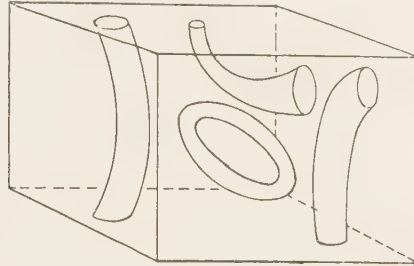


Fig. 1.

mouvement provoqué par le déplacement des solides, d'un mouvement cyclique irrotationnel à travers les ouvertures pratiquées dans les corps et autour des corps qui se prolongent jusqu'à la surface  $S_0$ . Nous désignerons par  $m + 1$  l'ordre de connexité du volume occupé par le fluide, déterminé par la forme et la disposition des solides, et nous admettrons que le déplacement des solides est assujéti à la condition de ne pas diminuer cet ordre de connexité, ni de modifier l'étendue des surfaces qui se trouvent en contact direct avec le fluide.

Pour calculer les projections sur les axes de coordonnées de la résultante des pressions hydrodynamiques sur l'un quelconque des  $n$  corps et les moments des pressions hydrodynamiques par rapport à ces mêmes axes, nous rapporterons le mouvement du fluide à trois axes mobiles, invariablement liés à celui des  $n$  corps que l'on considère.

Nous rendrons le volume occupé par le fluide simplement connexe en employant  $m$  cloisons, que nous représenterons comme des surfaces idéales rigides, de dimensions déterminée, invariablement liées aux axes mobiles lorsque le temps varie de  $t$  à  $t + dt$ . Ces cloisons peuvent librement pénétrer et se mouvoir dans le corps des solides, et à travers la paroi limite  $S_0$ , afin que le volume occupé par le fluide reste simplement connexe malgré la modification de la positions relative des solides dans l'intervalle  $dt$ .

Au contraire, en donnant au solide considéré un déplacement virtuel, compatible avec les liaisons indiquées ci-dessus, nous admettrons que les  $m$  cloisons, ainsi que les autres  $(n - 1)$  solides, conservent leur position par rapport aux axes fixes, liés à la surface limite  $S_0$ , et que ce n'est que les éléments des cloisons qui se trouvent en contact avec le corps déplacé qui sont affectés par ce déplacement; une mince bande peut s'ajouter ou être déduite de la cloison par l'effet de ce déplacement, car la cloison doit continuer à prendre naissance sur la paroi du solide déplacé.

4. *Expression du potentiel des vitesses.* — Désignons par  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$ , ...,  $(a_n, b_n, c_n)$ , les coordonnées des origines  $O_1, O_2, \dots, O_n$ , des trièdres  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , invariablement liés à chacun des  $n$  corps et par  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ , ...,  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ , les angles qui déterminent l'orientation des trièdres mobiles par rapport au trièdre fixe  $T_0$ . On peut toujours supposer qu'au moment initial les axes des trièdres mobiles sont parallèles à ceux du trièdre  $T_0$ .

Nous désignerons ensuite par  $(u_1, v_1, w_1)$ ,  $(u_2, v_2, w_2)$ , ...,  $(u_n, v_n, w_n)$  les projections sur les axes  $O_0 x_0, y_0, z_0$  du trièdre  $T_0$  des vitesses des origines  $O_1, O_2, \dots, O_n$ , et par  $(p_1, q_1, r_1)$ , ...,  $(p_n, q_n, r_n)$ , les composantes des rotations instantanées de chacun des  $n$  solides suivant les axes  $O_0 x_0, y_0, z_0$ .

Les projections sur ces mêmes axes de la vitesse d'un point  $P$  à la surface de l'un des corps, du corps  $k$  par exemple, seront

$$\begin{aligned}\overline{u_k} &= u_k + q_k(z_0 - c_k) - r_k(y_0 - b_k), \\ \overline{v_k} &= v_k + r_k(x_0 - a_k) - p_k(z_0 - c_k), \\ \overline{w_k} &= w_k + p_k(y_0 - b_k) - q_k(x_0 - a_k).\end{aligned}$$

En désignant par  $l, m, n$  les cosinus directeurs de la normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, à un élément  $d\sigma$  de la surface de l'un des corps et par  $\varphi_0$  le potentiel des vitesses d'un mouvement acyclique compatible avec celui des  $n$  solides, on doit avoir à la surface de chacun des corps

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = \overline{u_k} l + \overline{v_k} m + \overline{w_k} n \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$



Chacune des fonctions harmoniques  $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \varphi_{k3}, \psi_{k1}, \psi_{k2}, \psi_{k3}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) est ainsi déterminée à une constante près.

Considérons maintenant la fonction

$$\omega_0 = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \dots + x_m \omega_m$$

définie comme suit.  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont les  $m$  constantes cycliques qui correspondent aux  $m$  cloisons rendant le volume occupé par le fluide simplement connexe.  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ , sont des potentiels non uniformes; la circulation des vitesses qui correspond à la fonction  $\omega_k$  est égale à l'unité si elle est prise le long d'un contour fermé coupant la cloison  $k$  et est nulle si elle est prise sur un contour fermé qui ne la coupe pas. Sur les parois des solides et sur la surface limite  $S_0$  :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial n} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \omega_m}{\partial n} = 0.$$

Ces conditions déterminent chacune des fonctions  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ , à une constante près, car si l'on avait deux fonctions différentes  $\omega_k$  et  $\omega'_k$  satisfaisant aux conditions susdites, la fonction  $\omega_k - \omega'_k$  serait une fonction harmonique uniforme et  $\frac{\partial}{\partial n}(\omega_k - \omega'_k)$  serait nulle en tous les points des surfaces qui limitent le fluide; la différence  $\omega_k - \omega'_k$  doit donc être constante dans tout le volume occupé par le fluide.

Le potentiel complet du mouvement considéré sera

$$(4) \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 = \sum_{k=1}^n (u_k \varphi_{1k} + v_k \varphi_{2k} + w_k \varphi_{3k} + p_k \psi_{1k} + q_k \psi_{2k} + r_k \psi_{3k}) + \sum_{k=1}^m x_k \omega_k.$$

Les potentiels  $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots, \omega_k$  sont des fonctions des coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  et du temps par l'intermédiaire des paramètres définissant la position des solides. En effectuant une transformation de coordonnées nous pouvons exprimer ces potentiels en fonction des coordonnées mobiles liées à celui des corps que l'on considère et du temps. Nous supposons dans la suite que cette transformation est toujours effectuée à l'exception des cas où nous faisons varier la position de l'un des corps sans modifier celle des autres.

Démontrons encore que la dérivée  $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$  et, en général, les dérivées

du potentiel  $\varphi$  prises par rapport à l'un quelconque des paramètres définissant la position des solides, sont des fonctions uniformes. En effet, lorsqu'on donne un accroissement  $\delta a_i$ , compatible avec les liaisons, à la coordonnée  $a_i$ , les fonctions uniformes et non uniformes, dont la somme constitue le potentiel  $\varphi$ , varient, mais en continuant à être uniformes et non uniformes respectivement, car, en déduisant ces fonctions on ne spécifie pas la valeur du paramètre  $a_i$ ; les constantes cycliques des fonctions non uniformes  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  continuent à être, pour le même motif, égales à l'unité. Les différences des valeurs de la fonction  $\omega_k$ , en deux points infiniment voisins de part et d'autre de la  $k^{\text{ième}}$  cloison, avant et après que l'on aura donné un accroissement  $\delta a_i$  à la coordonnée  $a_i$ , sont respectivement

$$(\omega_k)_2 - (\omega_k)_1 = 1,$$

$$\left( \omega_k + \frac{\partial \omega_k}{\partial a_i} \delta a_i \right)_2 - \left( \omega_k + \frac{\partial \omega_k}{\partial a_i} \delta a_i \right)_1 = 1,$$

et par conséquent

$$\left( \frac{\partial \omega_k}{\partial a_i} \right)_2 - \left( \frac{\partial \omega_k}{\partial a_i} \right)_1 = 0.$$

Il résulte de ce raisonnement que la fonction

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial \omega_k}{\partial a_i}$$

est effectivement uniforme.

5. *Calcul des projections sur les axes des coordonnées des résultantes des pressions hydrodynamiques agissant sur les solides.* — Nous désignerons les projections sur les axes de coordonnées de la pression exercée par le  $i^{\text{ième}}$  solide sur le fluide par  $X_i, Y_i, Z_i$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i = \int \int_{S_i} p l \, d\mathcal{S}, \\ Y_i = \int \int_{S_i} p m \, d\mathcal{S}, \\ Z_i = \int \int_{S_i} p n \, d\mathcal{S}. \end{array} \right.$$

Les intégrales doubles s'étendent à la surface  $S_i$  du solide  $i$ ;  $l$ ,  $m$ ,  $n$  désignent les cosinus directeurs d'une normale dirigée vers l'intérieur du fluide.

Nous exprimerons la pression  $p$  en utilisant l'équation de pression rapportée à des axes mobiles obtenue plus haut [(3), p. 68]

$$(2) \quad p = -\frac{1}{2}\rho(W'^2 - \overline{W}^2) - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Nous supposons que les axes mobiles sont invariablement liés au corps  $i$  que nous considérons. Le potentiel des vitesses  $\varphi$  est donné par la formule (4) du paragraphe précédent.  $W'$  et  $\overline{W}$  expriment la vitesse relative et la vitesse d'entraînement.

Nous calculerons d'abord la partie de la pression  $X_i$

$$(3) \quad X_i = -\rho \int \int_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} l d\sigma - \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_i} (W'^2 - \overline{W}^2) l d\sigma$$

due à la variation du potentiel, c'est-à-dire le membre

$$-\rho \int \int_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} l d\sigma.$$

En raison de la formule (8) du paragraphe 1 et de la formule (4) du paragraphe 4, nous pouvons exprimer l'énergie cinétique  $T$  de toute la masse fluide comme suit

$$T = \mathfrak{E} + \mathfrak{X},$$

où  $\mathfrak{E}$  est une forme quadratique homogène des vitesses et des rotations et  $\mathfrak{X}$  une forme quadratique des circulations. Les coefficients de  $\mathfrak{E}$  et de  $\mathfrak{X}$  ne dépendent que des  $6n$  paramètres qui définissent la position des solides.

L'énergie cinétique  $T$  est fonction du temps par l'intermédiaire des mêmes grandeurs que le potentiel  $\varphi$ , si l'on considère les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , qui définissent la position d'un point  $P$ , par rapport au trièdre lié au corps  $i$ , comme des constantes.

Calculons la dérivée  $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial u_i}$ . D'après la formule (2) du paragraphe 1 et en remarquant que  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \varphi_{,i}$ , et que  $\frac{\partial \varphi_{,i}}{\partial n}$  est égale à  $l$  sur la surface du

corps  $i$  et nulle sur les parois des autres corps et de la surface limite  $S_0$ , nous avons (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_i} &= \frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int \int_V \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ &= -\rho \int \int_{S_i} \varphi \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial n} d\sigma - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial n} d\sigma \\ &= -\rho \int \int_{S_i} \varphi l d\sigma - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.\end{aligned}$$

Différentions cette expression par rapport au temps en nous rappelant que la surface  $S_i$  est fermée et ne varie pas,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_i} &= -\rho \int \int_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} l d\sigma - \rho \int \int_{S_i} \varphi \frac{dl}{dt} d\sigma - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma, \\ (4) - \rho \int \int_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} l d\sigma &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_i} + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \rho \int \int_{S_i} \varphi \frac{dl}{dt} d\sigma.\end{aligned}$$

Calculons maintenant le second membre

$$- \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_i} (\mathbf{W}^2 - \overline{\mathbf{W}^2}) l d\sigma$$

qui figure dans l'expression (3) de la composante  $X_i$  de la pression exercée par le corps  $i$  sur le fluide.

Soient  $T_r$  et  $T_e$  les énergies cinétiques des mouvements relatifs et d'entraînement,

$$\begin{aligned}T_r &= \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \overline{u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \overline{v_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \overline{w_i} \right)^2 \right] d\tau, \\ T_e &= \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V (\overline{u_i}^2 + \overline{v_i}^2 + \overline{w_i}^2) d\tau.\end{aligned}$$

En appliquant la formule générale de la variation des intégrales

(1) En appliquant les formules du paragraphe I, il ne faut pas perdre de vue qu'elles ont été obtenues dans la supposition que les normales sont dirigées vers l'extérieur.

triples <sup>(1)</sup>, nous pouvons écrire

$$(5) \quad \delta(T_r - T_e) = \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \delta(W'^2 - \overline{W}^2) d\tau \\ - \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^{k=n} \int \int_{S_k} (W'^2 - \overline{W}^2) \\ \times (\delta x_0 dy_0 dz_0 + \delta y_0 dz_0 dx_0 + \delta z_0 dx_0 dy_0).$$

Nous supposons, pour faire varier l'expression  $(T_r - T_e)$ , qu'elle est exprimée en fonction des coordonnées fixes  $O_0 x_0, y_0, z_0$ . Nous revenons ensuite aux coordonnées mobiles  $Ox, y, z$ . Rappelons qu'on peut admettre qu'au moment actuel les directions des deux systèmes d'axes coïncident :

$$x_0 = x + a_i, \quad y_0 = y + b_i, \quad z_0 = z + c_i.$$

Donnons, si les liaisons (voir le § 3) le permettent, un accroissement  $\delta a_i$  à la coordonnée  $a_i$ . Toutes les coordonnées  $x_0$  des points de la surface  $S_i$  du corps  $i$  reçoivent alors un accroissement  $\delta a_i$ , tandis que les coordonnées  $y_0, z_0$  des points de la surface du corps  $i$  ni les coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  des autres  $(n-1)$  solides ne varient pas.

On peut donc écrire, en remarquant que  $dy_0 dz_0 = l d\sigma$ ,

$$(6) \quad - \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_i} (W'^2 - \overline{W}^2) l d\sigma \\ = \frac{\partial}{\partial a} (T_r - T_e) - \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial a} (W'^2 - \overline{W}^2) d\tau.$$

Transformons le membre  $(T_r - T_e)$ . En raison des formules (7) et (4) du paragraphe 1, nous avons

$$(7) \quad (T_r - T_e) = \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ - \rho \int \int \int_V \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z} w_i \right) d\tau \\ + \mathcal{C} + \mathcal{K} + \rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \varphi \overline{W}_{ni} d\sigma + \rho \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \int \int_{\sigma_k} \overline{W}_{ni} d\sigma,$$

---

(1) E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. 1, 1917, p. 658.

où

$$(8) \quad \overline{W_{ni}} = \overline{u_i} l + \overline{v_i} m + \overline{w_i} n.$$

D'après la formule (9) du paragraphe 1, nous avons

$$(9) \quad 2\mathfrak{C} = -\rho \sum_{k=1}^{k=n} \iint_{S_k} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\tau + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \iint_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\tau.$$

En ajoutant et en déduisant  $\mathfrak{C}$  de la seconde partie de l'équation (7) et en tenant compte de la relation (9), on a

$$(10) \quad \begin{aligned} (\mathbf{T}_r - \mathbf{T}_e) &= \mathfrak{K} - \mathfrak{C} - \rho \sum_{k=1}^{k=n} \iint_{S_k} \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \overline{W_{ni}} \right) d\tau \\ &\quad - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \iint_{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \overline{W_{ni}} \right) d\tau. \end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport au paramètre  $a_i$  et en se rappelant que la surface  $S_i$  ne varie pas, on obtient

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} (\mathbf{T}_r - \mathbf{T}_e) &= \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a_i} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a_i} - \rho \sum_{k=0}^{k=n} \iint_{S_k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \overline{W_{ni}} \right) d\tau \\ &\quad - \rho \sum_{k=0}^{k=n} \iint_{S_k} \varphi \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\tau \\ &\quad + \rho \sum_{k=0}^{k=n} \varphi \frac{\partial \overline{W_{ni}}}{\partial a_i} d\tau \\ &\quad - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial a_i} \iint_{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \overline{W_{ni}} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Sur les surfaces  $S_k$  on a  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$ . Les valeurs de  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$  sur ces surfaces sont données par les formules (1) du paragraphe 3.  $\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right)$  est nulle sur toutes les surfaces  $S_k$  à l'exception de la surface  $S_i$

pour laquelle (voir p. 73)

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right) = -mr_i + nq_i = \frac{dl}{dt}.$$

On peut donc représenter l'équation (11) comme suit

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{\partial}{\partial a_i} (T_r - T_e) &= \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a_i} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a_i} - \rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \overline{W}_{ni} \right) d\mathfrak{S} \\ &\quad - \rho \int \int_{S_i} \varphi \frac{dl}{dt} d\mathfrak{S} + \rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \varphi \frac{\partial W_{ni}}{\partial a_i} d\mathfrak{S} \\ &\quad - \rho \sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \overline{W}_{ni} \right) d\mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Il nous reste à transformer le dernier membre de l'équation (6).

Rappelons d'abord que  $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$  est une fonction uniforme (voir p. 93).

Nous obtenons alors successivement :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial a_i} (W'^2 - \overline{W}^2) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ &\quad - \rho \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \overline{u}_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \overline{v}_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \overline{w}_i \right) d\tau \\ &= \rho \int \int \int_V \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \right) \right] d\tau \\ &\quad - \rho \int \int \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \right) \overline{u}_i + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \right) \overline{v}_i + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \right) \overline{w}_i \right] d\tau \\ &\quad - \rho \int \int \int_V \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial a_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial a_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \overline{w}_i}{\partial a_i} \right) d\tau \\ &= -\rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\mathfrak{S} + \rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \overline{W}_{ni} d\mathfrak{S} \\ &\quad + \rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \varphi \frac{\partial \overline{W}_{ni}}{\partial a_i} d\mathfrak{S} + \rho \sum_{k=1}^{k=n} x_k \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \overline{W}_{ni}}{\partial a_i} d\mathfrak{S}, \end{aligned}$$

et, en définitive,

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & -\frac{1}{2} \rho \int \int_V \frac{\partial}{\partial a_i} (\mathbf{W}^2 - \overline{\mathbf{W}^2}) d\tau \\
 & = \rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \overline{\mathbf{W}_{ni}} \right) d\tau \\
 & = \rho \sum_{k=0}^{k=n} \int \int_{S_k} \varphi \frac{\partial \overline{\mathbf{W}_{ni}}}{\partial a_i} d\tau - \rho \sum_{k=0}^{k=n} x_k \int \int_{S_k} \frac{\partial \overline{\mathbf{W}_{ni}}}{\partial a_i} d\tau.
 \end{aligned}$$

En substituant les expressions (12) et (13) dans l'équation (6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & -\frac{1}{2} \rho \int \int_{S_i} (\mathbf{W}^2 - \overline{\mathbf{W}^2}) l d\tau \\
 & = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial a_i} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} - \rho \int \int_{S_i} \varphi \frac{dl}{dt} d\tau \\
 & \quad - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{S_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \overline{\mathbf{W}_{ni}} \right) d\tau \\
 & \quad - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \int \int_{S_k} \frac{\partial \overline{\mathbf{W}_{ni}}}{\partial a_i} d\tau.
 \end{aligned}$$

Les formules (4) et (14) permettent d'exprimer la composante  $X_i$  de la pression exercée par le corps  $i$  sur le fluide (3) comme suit :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad X_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial a_i} \\
 & + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{S_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\tau - \int \int_{S_k} \frac{\partial \overline{\mathbf{W}_{ni}}}{\partial a_i} d\tau \right] \\
 & - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{S_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \overline{\mathbf{W}_{ni}} \right) d\tau.
 \end{aligned}$$

D'après la convention que nous avons faite au paragraphe 3, lorsqu'on donne un déplacement virtuel à l'un des  $n$  corps, toutes les cloisons conservent une position fixe par rapport aux axes immobiles. Lorsqu'on donne un déplacement virtuel aux corps  $i$  en faisant varier les coordonnées  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , ce n'est que la dimension des

cloisons adjacentes au corps  $i$  qui peut varier (*voir* p. 90); on aura donc pour les cloisons adjacentes aux autres ( $n - 1$ ) corps

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \overline{W}_{ni} d\sigma = \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \overline{W}_{ni}}{\partial a_i} d\sigma.$$

Par conséquent, en supposant qu'il y a  $\mu$  cloisons qui prennent naissance sur le corps  $i$ , on peut transformer l'équation (15) comme suit

$$\begin{aligned} (16) \quad X_i = & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial u_i} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial a_i} \\ & + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma - \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma \right] \\ & - \rho \sum_{k=1}^{k=\mu} x_{ik} \left[ \int \int_{\sigma_{ik}} \frac{\partial \overline{W}_{ni}}{\partial a_i} d\sigma - \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W}_{ni} d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Dans cette formule  $\sigma_k$  exprime l'une quelconque des  $m$  cloisons adjacentes à tous les corps, et  $\sigma_{ik}$  exprime l'une quelconque des  $\mu$  cloisons adjacentes au corps  $i$ .

Dans le déplacement réel des corps les cloisons sont considérées comme des surfaces idéales rigides qui conservent une superficie constante et qui peuvent se mouvoir librement à travers la paroi  $S_0$  qui limite extérieurement le fluide (*voir* p. 89). En raison de cette remarque et du théorème démontré dans le paragraphe 8 du Chapitre I (p. 73), on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \int_{\sigma_{ik}} \frac{\partial \overline{W}_{ni}}{\partial a_i} d\sigma &= \int \int_{\sigma_{ik}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{W}_{ni}}{\partial u_i} d\sigma = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W}_{ni} d\sigma \\ & \quad (k = 1, 2, \dots, \mu), \end{aligned}$$

La dimension et la forme des cloisons, dans le déplacement réel, ne doivent pas varier dans le temps et doivent être telles qu'aux moments  $t$  et  $t + dt$  le volume occupé par le fluide reste simplement connexe, mais en dehors de ces restrictions, elles peuvent être prises arbitrairement, comme cela résulte de l'équation (15). En effet

dans les membres

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma,$$

en dehors de la surface  $S_0$  limitant le fluide extérieurement,  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$  est nulle sur la cloison  $\sigma_k$ , tandis que les deux autres membres qui dépendent de  $\sigma_k$  peuvent être transformés comme suit

$$(17) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \overline{W_{ni}} d\sigma - \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \overline{W_{ni}}}{\partial a_i} d\sigma \\ &= \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_{k1}} (\overline{W_{ni}}) d\sigma + \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_{k2}} (\overline{W_{ni}}) d\sigma. \end{aligned}$$

Le symbole  $(\overline{W_{ni}})$  exprime qu'il faut considérer  $\overline{W_{ni}}$ , en prenant la dérivée par rapport à  $a_i$ , comme une constante et  $\sigma_{k1}$ ,  $\sigma_{k2}$  sont les parties de la cloison  $\sigma_k$  situées respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la surface limite  $S_0$ , et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_{k2}} (\overline{W_{ni}}) d\sigma = 0,$$

car, en faisant varier la coordonnée  $a_i$ , nous considérons les cloisons comme invariablement liées aux axes fixes, et ce n'est qu'une mince bande de la cloison en contact avec le solide  $i$  qui est affectée par le déplacement de ce solide; la différence (17) ne dépend donc plus de la partie  $\sigma_{k2}$  de la cloison, disposée à l'extérieur de la surface limite  $S_0$ .

D'après ces remarques on peut transformer l'expression (16) comme suit

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_i = & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial u_i} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a_i} \\ & + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma \\ & - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma \\ & - \sum_{k=1}^{k=\mu} x_{ik} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W_{ni}} d\sigma - \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W_{ni}} d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Dans cette formule  $\sigma_k$  exprime l'une quelconque des  $m$  cloisons adjointes à tous les  $n$  corps,  $\sigma_{ik}$  exprime l'une quelconque des  $\mu$  cloisons adjointes au corps  $i$ .

Remarquons encore que les dérivées des projections sur les normales aux cloisons des vitesses d'entraînement correspondant aux trièdres mobiles  $T_k$ ,  $k \neq i$  (voir p. 90) prises par rapport à  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ , sont nulles. On peut donc écrire

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W_{ns}} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W_{ns}} = 0 \quad (s \neq i)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\mu} x_{ik} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W_{ni}} d\sigma - \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_{ik}} \overline{W_{ni}} d\sigma \right] \\ &= \sum_{k=1}^m x_k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \overline{W_{nk}} d\sigma - \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \overline{W_{nk}} d\sigma \right]. \end{aligned}$$

En substituant cette dernière expression dans l'équation (18), on obtient

$$\begin{aligned} (19) \quad X_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial u_i} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a_i} + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \int \int_{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \overline{W_{nk}} \right) d\sigma \\ &\quad - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial a_i} \int \int_{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \overline{W_{nk}} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Désignons le flux relatif dans le mouvement acyclique à travers la cloison  $k$  par  $\chi_k$  et posons

$$(20) \quad \mathfrak{E} - \mathfrak{K} + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \chi_k = R.$$

L'équation (19) peut alors s'écrire

$$(21) \quad X_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial u_i} - \frac{\partial R}{\partial a_i},$$

car  $\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial u_i} = 0$ ,

On obtient de même deux équations analogues

$$(21') \quad \begin{cases} Y_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial v_i} - \frac{\partial R}{\partial b_i}, \\ Z_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial w_i} - \frac{\partial R}{\partial c_i}. \end{cases}$$

Dans la fonction modifiée de Lagrange  $R$ ,  $\mathfrak{e}$  exprime l'énergie cinétique du fluide,  $\mathfrak{x}$  l'énergie cinétique du mouvement cyclique et  $\chi_k$  le flux relatif à travers la cloison  $k$  dans le mouvement acyclique.

6. *Calcul des moments des pressions hydrodynamiques agissant sur les corps.* — Désignons par  $L, M, N$  les moments des pressions, exercées par le corps  $i$  sur le fluide, par rapport aux axes mobiles  $O_i x, y, z$ , invariablement liés au corps. On peut toujours supposer qu'au moment actuel les directions des axes fixes et mobiles coïncident et écrire

$$(1) \quad \begin{cases} L_i = \iint_{S_i} [(y_0 - b_i) n - (z_0 - c_i) m] p d\sigma, \\ M_i = \iint_{S_i} [(z_0 - c_i) l - (x_0 - a_i) n] p d\sigma, \\ N_i = \iint_{S_i} [(x_0 - a_i) m - (y_0 - b_i) l] p d\sigma, \end{cases}$$

$l, m, n$  sont les cosinus directeurs des normales à la surface  $S_i$  dirigées vers l'intérieur du fluide ; la pression  $p$  s'exprime, si l'on rapporte le mouvement à des axes invariablement liées au corps  $i$ , par l'équation

$$(2) \quad p = -\frac{1}{2} \rho (W'^2 - \overline{W^2}) - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

où  $W'$  et  $\overline{W}$  représentent les vitesses relative et d'entraînement en un point  $P$  lié aux axes mobiles, et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  la variation du potentiel des vitesses en ce même point.

En substituant l'expression (2) dans la première des formules (1),

on a

$$(3) \quad \begin{aligned} L_t = & - \rho \int \int_{S_i} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\sigma \\ & - \frac{1}{2} \rho \int \int_{S_i} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] (W'^2 - \overline{W^2}) d\sigma. \end{aligned}$$

Calculons d'abord la première intégrale double. En employant un raisonnement analogue à celui que nous avons utilisé à page 95, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p_i} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial p_i} \int \int_V \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ &= \rho \int \int_V \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial z} \right) d\tau \\ &= - \rho \int \int_{S_i} \varphi \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial n} d\sigma - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \int \int \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial n} d\sigma \\ &= - \rho \int \int_{S_i} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] \varphi d\sigma - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial p} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma, \end{aligned}$$

et, en prenant la dérivée par rapport au temps en considérant les coordonnées  $x, y, z$ , qui déterminent la position d'un point P par rapport aux axes liés au solide, comme des constantes, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} (4) \quad & - \rho \int \int_{S_i} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\sigma \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p_i} + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma \\ & \quad + \rho \int \int_{S_i} \varphi \frac{d}{dt} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] d\sigma. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la seconde intégrale double de l'équation (3). En désignant par  $T_r$  et  $T_e$  l'énergie cinétique du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement et en appliquant la formule géné-

rale de la variation des intégrales triples (voir p. 96), nous avons

$$(5) \quad \begin{aligned} \delta(T_r - T_e) = & \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \delta(W'^2 - \bar{W}^2) d\tau \\ & - \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^{k=n} \int \int_{\Sigma_i} (W'^2 - \bar{W}^2) (\delta x_0 dy_0 dz_0 \\ & + \delta y_0 dz_0 dx_0 + \delta z_0 dx_0 dy_0). \end{aligned}$$

Calculons la variation  $\delta(T_r - T_e)$  lorsqu'on tourne le corps  $i$  autour de l'axe  $O_i x$  d'un angle  $\delta\alpha_i$  (nous supposons que ce déplacement est compatible avec les liaisons), tandis que les autres corps et les cloisons conservent leur position.

A la surface de tous les corps à l'exception du corps  $i$ , on aura

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta z_0 = 0.$$

A la surface du corps  $i$ ,  $\delta x_0$  est aussi nulle. Pour calculer les variations  $\delta y_0$  et  $\delta z_0$  à la surface de ce corps, posons

$$\begin{aligned} y_0 - b_i &= r \cos \alpha, \\ z_0 - c_i &= r \sin \alpha. \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} \delta y_0 &= -r \sin \alpha \delta \alpha_i = -(z_0 - c_i) \delta \alpha_i, \\ \delta z_0 &= r \cos \alpha \delta \alpha_i = (y_0 - b_i) \delta \alpha_i. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5) et en remarquant que

$$\begin{aligned} dz_0 dx_0 &= m d\tau, \\ dx_0 dy_0 &= n d\tau, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$(6) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \rho \int \int_{\Sigma_i} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] (W'^2 - \bar{W}^2) d\tau \\ & = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} [T_r - T_e] - \frac{1}{2} \rho \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (W'^2 - \bar{W}^2) d\tau. \end{aligned}$$

En faisant subir à la seconde partie de l'expression (6) des transformations tout à fait analogues à celles qui sont indiquées dans les

pages 96-100, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & -\frac{1}{2}\rho \int \int \int_{s_i} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] (W'^2 - \bar{W}^2) d\tau \\
 & = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \alpha_i} - \rho \int \int_{s_i} \varphi \frac{d}{dt} [(y_0 - b_i)n - (z_0 - c_i)m] d\tau \\
 & \quad - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int \int_{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \bar{W}_{ni} \right) d\sigma - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \bar{W}_{ni}}{\partial \alpha_i} d\sigma.
 \end{aligned}$$

$\mathcal{K}$  et  $\mathfrak{C}$  expriment l'énergie cinétique des mouvements cyclique et acyclique et  $\bar{W}_{ni}$  la projection de la vitesse d'entraînement  $\bar{W}$  sur les normales aux cloisons.

En substituant les expressions (4) et (7) dans la formule (3), on a

$$\begin{aligned}
 (8) \quad L_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha_i} + \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p_i} \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \int \int_{\sigma_k} \frac{\partial \bar{W}_{ni}}{\partial \alpha_i} x \right] \\
 & \quad - \rho \sum_{k=1}^{k=m} x_k \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int \int_{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \bar{W}_{ni} \right) d\sigma.
 \end{aligned}$$

En répétant le raisonnement exposé dans les pages 100-102, on peut transformer l'équation (8) comme suit

$$(9) \quad L_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_i}.$$

On obtient de même deux équations analogues pour les moments  $M_i$  et  $N_i$

$$(9') \quad \begin{cases} M_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \\ N_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial r_i} - \frac{\partial R}{\partial \gamma_i}. \end{cases}$$

On aura en tout  $3n$  équations telles que (9), (9') et  $3n$  équations telles que les équations (21), (21') du paragraphe 5.

7. *Equation des forces vives.* — L'équation (21) du paragraphe 5 peut être exprimée, en raison de la formule (20) du même para-



En posant

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\rho \left( x_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial u_1} + x_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial u_1} + \dots + x_m \frac{\partial \chi_m}{\partial u_1} \right), \\ \beta_2 &= -\rho \left( x_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1} + x_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial v_1} + \dots + x_m \frac{\partial \chi_m}{\partial v_1} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ \beta_i &= -\rho \left( x_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial u_i} + x_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial u_i} + \dots + x_m \frac{\partial \chi_m}{\partial u_i} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ \beta_{6n} &= -\rho \left( x_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial r_n} + x_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial r_n} + \dots + x_m \frac{\partial \chi_m}{\partial r_n} \right),\end{aligned}$$

nous pouvons représenter la formule (4) comme suit

$$\begin{aligned}-\rho \sum_{k=1}^{k=m} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi_k}{\partial u_i} - \frac{\partial \chi_k}{\partial a_i} \right) &= \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial a_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial a_i} \right) u_1 \\ &+ \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial b_1} - \frac{\partial \beta_2}{\partial u_i} \right) v_1 + \dots + \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial \gamma_n} - \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial a_i} \right) r_n.\end{aligned}$$

En substituant cette valeur dans l'expression (1) et en transformant d'une façon analogue les composantes des forces  $Y_i$ ,  $Z_i$  et les couples  $L_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$ , on obtient les  $6n$  équations suivantes

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a_1} + \star + \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial a_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial b_1} \right) v_1 + \dots + \left( \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial a_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma_n} \right) r_n + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a_1} = X_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial v_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial b_1} + \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial b_1} - \frac{\partial \beta_2}{\partial a_1} \right) u_1 + \star + \dots + \left( \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial b_1} - \frac{\partial \beta_2}{\partial \gamma_n} \right) r_n + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial b_1} = Y_1, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial r_n} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \gamma_n} + \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma_n} - \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial a_1} \right) u_1 + \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \gamma_n} - \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial b_1} \right) v_1 + \dots + \star + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \gamma_n} = N_n. \end{cases}$$

En multipliant ces équations respectivement par  $u_1$ ,  $v_1$ , ...,  $r_n$ , et en les additionnant, on obtient

$$\begin{aligned}(6) \quad & X_1 u_1 + Y_1 v_1 + \dots + N_n r_n \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a_1} + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a_1} \right) u_1 + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial v_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial b_1} + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial b_1} \right) v_1 + \dots \\ &+ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial r_n} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \gamma_n} + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \gamma_n} \right) r_n.\end{aligned}$$

L'énergie cinétique du mouvement acyclique du fluide T étant une

forme quadratique homogène des vitesses et des rotations, on a

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{C} &= \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial v_1} v_1 + \dots + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial r_n} r_n. \\ 2 \frac{d\mathfrak{C}}{dt} &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a_1} \right) u_1 + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial v_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial b_1} \right) v_1 + \dots + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial r_n} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \gamma_n} \right) r_n \\ &\quad + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a_1} u_1 + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial b_1} v_1 + \dots + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \gamma_n} r_n + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial r_n} \frac{dr_n}{dt}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(7) \quad \frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a_1} \right) u_1 + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial v_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial b_1} \right) v_1 + \dots + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial r_n} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \gamma_n} \right) r_n.$$

L'énergie cinétique du mouvement cyclique du fluide  $\mathfrak{K}$  étant une forme quadratique homogène des circulations, qui sont indépendantes du temps, on a

$$(8) \quad \frac{d\mathfrak{K}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a_1} u_1 + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial b_1} v_1 + \dots + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \gamma_n} r_n.$$

En raison des expressions (7) et (8) l'équation (6) peut s'écrire

$$(9) \quad \frac{d}{dt} (\mathfrak{C} + \mathfrak{K}) = X_1 u_1 + Y_1 v_1 + \dots + N_n r_n.$$

Les composantes des forces et des couples résultants, agissant sur les solides par l'effet des pressions hydrodynamiques, sont  $(-X_1)$ ,  $(-Y_1)$ , ...,  $(-N_n)$ . Supposons que les  $n$  solides sont aussi sollicités par les forces et les couples  $X'_1$ ,  $Y'_1$ ,  $Z'_1$ , ...,  $L'_n$ ,  $M'_n$ ,  $N'_n$ . En désignant par  $\mathfrak{C}_0$  l'énergie cinétique de tous les solides, on a d'après le théorème des forces vives

$$(10) \quad \frac{d\mathfrak{C}_0}{dt} = (X'_1 - X_1) u_1 + (Y'_1 - Y_1) v_1 + \dots + (N'_n - N_n) r_n.$$

En additionnant les formules (9) et (10), on obtient

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{C} + \mathfrak{K} + \mathfrak{C}_0) = X'_1 u_1 + Y'_1 v_1 + \dots + N'_n r_n,$$

et si le système est conservatif

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{X} + \mathfrak{E}_0 + \Pi = \text{const.}$$

où  $\Pi$  est l'énergie potentielle du système.

8. *Forme générale des équations du mouvement.* — En appliquant l'équation de Lagrange aux paramètres  $a_1, b_1, \dots, \gamma_n$ , nous obtenons, en utilisant les notations du paragraphe précédent, les  $3n$  équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial a_1} &= (X'_1 - X_1), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial v_1} - \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial b_1} &= (Y'_1 - Y_1), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial r_n} - \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial \gamma_n} &= (N'_n - N_n). \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations aux équations (5) de la page 108, en supposant qu'il y a une fonction de forces pour les forces  $X'_1, Y'_1, \dots, N'_n$ , et en désignant l'énergie totale du système par  $M$ ,

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}_0,$$

on peut écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial a_1} + \star + \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial a_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial b_1} \right) v_1 + \dots + \left( \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial a_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma_n} \right) r_n + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial v_1} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial b_1} + \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial b_1} - \frac{\partial \beta_2}{\partial a_1} \right) u_1 + \star + \dots + \left( \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial b_1} - \frac{\partial \beta_2}{\partial \gamma_n} \right) r_n + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial b_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial r_n} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \gamma_n} + \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma_n} - \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial a_1} \right) u_1 + \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \gamma_n} - \frac{\partial \beta_{6n}}{\partial b_1} \right) v_1 + \dots + \star + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \gamma_n} + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_n} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le nombre des équations est égal à celui des degrés de liberté du système, c'est-à-dire à  $6n$  si les solides peuvent se mouvoir librement dans le fluide et est moindre s'ils sont en contact les uns avec les autres ou avec la paroi qui limite antérieurement le fluide, comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 3.

Les équations (1) ont la même forme que les équations de W. Thomson (1), mais elles sont plus générales, car elles peuvent

---

(1) H. LAMB, *Hydrodynamics*, p. 188.

être appliquées non seulement au problème du mouvement de corps transpercés quand il y a circulation, mais aussi à l'important problème du mouvement de corps autour desquels le fluide est animé d'un mouvement cyclique <sup>(1)</sup>. Notons aussi que nous avons obtenu ces équations en appliquant directement l'équation de pression.

## CHAPITRE IV

### Mouvement cyclique plan d'un liquide autour d'un solide qui se meut parallèlement à une paroi rectiligne

1. *Force et couple résultants agissant sur un cylindre.* — Considérons un cylindre de section normale quelconque qui se meut orthogonalement à ses génératrices et parallèlement à une paroi plane  $S_0$  avec une vitesse uniforme ( $-V$ ) dans un fluide incompressible animé d'un mouvement cyclique autour du solide. Nous supposons que les deux bouts du cylindre glissent sur deux plans parallèles limitant latéralement le fluide et perpendiculaires à la paroi  $S_0$ . La distance entre les deux plans parallèles peut être prise arbitrairement; nous admettrons qu'elle est égale à l'unité, elle ne figurera donc pas dans les formules. Nous admettrons que la paroi  $S_0$  se confond avec le plan  $xOz$  et que le mouvement du fluide est parallèle au plan  $xOy$ .

Les formules générales obtenues dans le Chapitre précédent peuvent être appliquées dans ce cas particulier. En désignant la constante cyclique par  $\alpha$ , on peut exprimer l'énergie cinétique du mouvement acyclique  $F$  et l'énergie cinétique du mouvement cyclique  $K$  comme suit :

$$\mathcal{E} = AV^2, \quad \mathcal{K} = B\alpha^2.$$

L'énergie cinétique totale sera [(8), p. 36)]:

$$\mathcal{E} + \mathcal{K} = AV^2 + B\alpha^2.$$

Les coefficients  $A$  et  $B$  dépendent de la coordonnée  $a$  qui détermine la distance du solide à la paroi  $S_0$ , mais non de la coordonnée qui détermine sa position par rapport au plan  $yOz$ .

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 826.

Nous supposons ensuite que la cloison (la coupure), qui rend le domaine occupé par le fluide simplement connexe, coïncide, entre la paroi du solide et la paroi  $S_0$ , avec la coordonnée  $a$ .

En raison de ces remarques, les formules (21), (21') de la page 103 et les formules (9), (9') de la page 106 permettent d'écrire :

$$(1) \quad \begin{aligned} X &= 0, & Y &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a} + \rho \varkappa \frac{\partial \chi}{\partial a}, \\ N &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \gamma} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \gamma} + \rho \varkappa \frac{\partial \chi}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

Nous changeons le signe de  $X, Y, N$  dans les formules générales, car nous exprimons les composantes de la force et du couple résultants agissant sur le solide.

Calculons la force  $Y$  lorsque la distance  $a$  entre le solide et la paroi  $S_0$  croît indéfiniment. En remarquant que  $\chi$  exprime le flux relatif du mouvement acyclique à travers la coupure et en désignant par  $\chi_1$  le flux absolu du mouvement acyclique, nous pouvons écrire :

$$(2) \quad Y = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a} + \rho \varkappa \frac{\partial \chi}{\partial a} + \rho \varkappa V.$$

Lorsque  $a$  croît indéfiniment, l'énergie cinétique du mouvement acyclique du fluide et le flux  $\chi_1$  tendent vers une limite déterminée et les dérivées  $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a}$  et  $\frac{\partial \chi_1}{\partial a}$  vers zéro. L'énergie cinétique du mouvement cyclique  $\varkappa$  croît indéfiniment comme  $\log a$ , mais la limite de la dérivée  $\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a}$  est égale à zéro.

La valeur limite de la force  $Y$ , normale à la direction du mouvement, pour  $a = \infty$ , est, par conséquent :

$$Y = \rho \varkappa V.$$

Ce résultat pouvait être prévu en raison du théorème de Joukowski qui peut être considéré comme le cas limite du théorème exprimé par les formules (1).

2. *Cas d'un cylindre rond. Calcul du potentiel des vitesses du mouvement acyclique.* — Appliquons les formules (1) du paragraphe

précédent dans le cas où la section du cylindre est un cercle de rayon  $b$  et la distance de son centre à la paroi est  $a$ .

Nous considérerons le mouvement relatif en communiquant à tout le système une vitesse inverse à celle du solide. Pour que la direction de la vitesse relative à l'infini coïncide avec la direction positive de l'axe  $Ox$ , nous admettrons que la vitesse du corps est  $(-V)$  et non pas  $V$ . La vitesse relative à l'infini sera alors  $V$ . En raison de ces remarques, les équations (1) du paragraphe 1<sup>er</sup> peuvent s'écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} X = 0, \\ Y = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a} + \rho z \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a}, \\ N = 0. \end{cases}$$

Le couple  $N$  est nul, car  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{K}$  et  $\mathfrak{L}$  ne varient pas lorsqu'on fait tourner le cylindre rond autour de son axe.

Calculons le potentiel des vitesses correspondant à ce problème. Les plans des variables

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ w &= \varphi + i\psi \end{aligned}$$

et des variables auxiliaires  $t_1$  et  $t$  sont indiqués dans la planche donnée ci-après.

Représentons avec M. H. Villat (1) d'une façon conforme le domaine  $z$  occupé par le fluide sur la bande annulaire  $t_1$  comprise entre deux cercles concentriques de rayon  $r$  et  $r_1$  ( $r_1 > r$ ),

Posons

$$(1) \quad \begin{cases} t_1 = -\frac{z + ni}{z - ni} ri, \\ z = \frac{t_1 - ir}{t_1 + ir} ni, \end{cases}$$

où

$$z = x + iy, \quad t_1 = \xi + i\eta.$$

On déduit de ces équations les relations suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\xi}{r} = \frac{2nx}{x^2 + (y-n)^2}, \\ \frac{\eta}{r} = \frac{x^2 + (y^2 - n^2)}{x^2 + (y-n)^2}. \end{cases}$$

---

(1) *Loc. cit. ante*, p. 53.



se transforme dans le plan  $t_1$  en un cercle

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 = r$$

concentrique au cercle M.

En substituant les expressions (2) dans l'équation (4), on peut écrire :

$$(5) \quad \left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{r}\right)^2 = \frac{[n^2 x^2 + (x^2 + (y^2 - n^2))^2]}{[x^2 + (y - n)^2]^2} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2$$

et, en éliminant  $x$  à l'aide de l'équation (3), on obtient :

$$\frac{[1(a^2 - n^2)y^2 + 4(n^2 + b^2 - a^2)ay + (n^2 + b^2 - a^2)^2]}{4(a - n)^2 y^2 + 4(n^2 + b^2 - a^2)(a - n)y + (n^2 + b^2 - a^2)^2} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2.$$

Pour que cette expression soit vérifiée identiquement, il faut que

$$n^2 + b^2 - a^2 = 0,$$

$$\frac{a + n}{a - n} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2$$

et, par conséquent,

$$(6) \quad \begin{cases} n = \sqrt{a^2 - b^2}, \\ \frac{r}{r_1} = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \end{cases}$$

En prenant le signe + devant le radical, nous faisons correspondre au point  $z = 0$  du plan  $z$  le point  $t_1 = +ir$  du plan  $t_1$ .

Le rapport  $\frac{r}{r_1}$  figurera plus bas comme module de la fonction  $\Theta$  de Jacobi que nous devrons utiliser pour exprimer le potentiel des vitesses. Nous pouvons donc poser

$$(7) \quad \frac{r}{r_1} = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} = q = e^{-\pi \frac{k'}{k}}.$$

Pour représenter d'une façon conforme la couronne du plan  $t_1$  sur

le demi-plan supérieur du plan  $z$ ; nous poserons :

$$(8) \quad t_1 = -r_1 i e^{i\frac{\pi}{K} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}} = -r_1 i e^{i\frac{\pi}{K} u}$$

où

$$(8') \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \\ K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}. \end{array} \right.$$

En effet, lorsque  $t$  varie de zéro à 1,  $u$  est réel et varie de zéro à  $K$ , tandis que le point dont l'affixe est  $t_1$  décrit le demi-cercle CEB; lorsque  $t$  varie de 1 à  $\frac{1}{k}$ , on peut poser :

$$\begin{aligned} u &= K + i\varphi, \\ t_1 &= r_1 e^{-i\frac{\pi}{K} \left( \frac{1}{k} + i\frac{\varphi}{2} \right)}, \end{aligned}$$

où  $\varphi$  varie de zéro à  $K'$  et le point correspondant du plan  $z$ , décrit le segment BA; enfin lorsque  $t$  varie de  $\frac{1}{k}$  à  $\infty$ , on peut poser :

$$\begin{aligned} u &= K + iK' - \varphi, \\ t_1 &= r_1 e^{i\frac{\pi}{K} \left( \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{K} \right)}, \end{aligned}$$

où  $\varphi$  varie de zéro à  $K$  et le point d'affixe  $t_1$  décrit le demi-cercle APK. Il est aussi facile de vérifier que lorsque  $t$  varie de  $-\infty$  à 0 le point correspondant du plan  $z$ , décrit la trajectoire KQABFC.

En éliminant  $t_1$  des formules (1) et (8), on obtient :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{iK}{\pi} \log \frac{z + i\sqrt{a^2 - b^2}}{z - i\sqrt{a^2 - b^2}} + iK', \\ z = -i\sqrt{a^2 - b^2} \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{K}(u - iK')}}{1 - e^{i\frac{\pi}{K}(u - iK')}} \end{array} \right.$$

$$(9') \quad \frac{du}{dz} = \frac{K}{2\pi\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{\left[ 1 - e^{i\frac{\pi}{K}(u - iK')} \right]^2}{e^{i\frac{\pi}{K}(u - iK')}}.$$

Pour représenter d'une façon conforme le plan  $w$  sur le plan  $t$  (voir la planche I), on peut écrire, en appliquant la méthode de Schwarz et Christoffel,

$$(10) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{P(t^2 - \operatorname{sn}^2 \alpha)}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}},$$

et, en effectuant l'intégration (1),

$$(11) \quad \begin{aligned} w &= P \int_0^u (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \alpha) du + Q \\ &= -\frac{P}{k^2} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \left( \frac{P}{k^2} \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - P \operatorname{sn}^2 \alpha \right) u + Q. \end{aligned}$$

On déterminera les constantes  $P$ ,  $Q$  et  $\operatorname{sn} \alpha$  en remarquant qu'au point A [voir les figures 2 et 4 de la planche I et les formules (8) et (10)] à la valeur  $t = \frac{1}{k}$ ,  $u = K + iK'$ , correspond la valeur  $w = 0$  et aux points C et B aux valeurs  $t = 0$  et  $t = 1$  ( $u = 0$  et  $u = K$ ), correspond une valeur  $w = i\psi_0$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} -\frac{P}{k^2} \frac{\Theta'(K + iK')}{\Theta(K + iK')} + \left( \frac{P}{k^2} \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - P \operatorname{sn}^2 \alpha \right) (K + iK') + Q &= 0, \\ -\frac{P}{k^2} \frac{\Theta'(0)}{\Theta(0)} + Q &= i\psi_0, \\ -\frac{P}{k^2} \frac{\Theta'(K)}{\Theta(K)} + P \left( \frac{1}{k^2} \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \operatorname{sn}^2 \alpha \right) K + Q &= i\psi_0, \end{aligned}$$

ou, en remarquant que

$$\Theta'(0) = 0, \quad \Theta'(K) = \Theta'_1(0) = 0,$$

car  $\Theta(u)$  et  $\Theta_1(u)$  sont paires, et que (2)

$$\begin{aligned} \frac{\Theta''(K + iK')}{\Theta(K + iK')} &= \left[ \frac{d}{du} \log \Theta(u + K + iK') \right]_{u=0} = \left[ \frac{d}{du} \log e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u + iK')} H_1(u) \right]_{u=0} \\ &= -\frac{i\pi}{2K} + \frac{H'_1(0)}{H_1(0)} = -\frac{i\pi}{2K}, \end{aligned}$$

(1) P. APPELL et E. LACOUR, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, 1897, p. 144

(2) *Loc. cit.*, p. 119.

car  $H_1(u)$  est également paire, on trouve

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = i\psi_0, \\ \operatorname{sn}^2 \alpha = \frac{1}{k^2} \frac{\Theta'(0)}{\Theta(0)}, \\ P = -\frac{2k^2 K \psi_0}{\pi}. \end{array} \right.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (11), on a

$$(13) \quad w = \frac{2K\psi_0}{\pi} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + i\psi_0.$$

Comme cela résulte de la formule (10) la valeur de  $\operatorname{sn}^2 \alpha$  détermine la position des points critiques de vitesses nulles E et F, dans le mouvement acyclique considéré (voir la planche I).

Pour définir entièrement  $w$ , il nous reste à exprimer  $\psi_0$  par les paramètres  $a, b, V$ , c'est-à-dire par la distance de l'axe du cylindre à la paroi rectiligne, le rayon du cylindre et la vitesse relative à l'infini.

En posant

$$u = iK = v,$$

et en remarquant que

$$\operatorname{sn}(v + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} v},$$

nous pouvons écrire, en raison des formules (9') et (11),

$$V = \left( \frac{dw}{du} \frac{du}{dz} \right)_{z=\infty} = \frac{4k^2 K^2 \psi_0}{\pi^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \left[ \left( \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 v} - \operatorname{sn}^2 \alpha \right) \sin^2 \frac{\pi v}{2K} \right]_{v=0} = \frac{\psi_0}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

car au point  $z = \infty$  correspond la valeur  $u = iK'$  [voir la formule (9)],  $\operatorname{sn} \alpha$  est l'une des valeurs que prend  $\operatorname{sn} u$  sur la paroi du cylindre et ne devient pas infinie, enfin

$$\lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{\pi v}{2K}}{\operatorname{sn} v} \right) = \frac{\pi}{2K}.$$

Donc

$$(14) \quad \psi_0 = V \sqrt{a^2 - b^2},$$

et, en remarquant que la ligne de courant  $\psi_0$  délimite le fluide qui

s'écoule au-dessous et au-dessus du cylindre et que la ligne de courant  $\psi = 0$  se confond avec le mur rectiligne, on peut écrire, en désignant par  $\chi$  le flux à travers la coupure AB (voir la figure 1 de la planche I),

$$(15) \quad \chi = V \sqrt{a^2 - b^2}.$$

En éliminant  $\psi_0$  des formules (13) et (14), nous obtenons comme expression définitive de  $\omega$ , dans le mouvement acyclique

$$(16) \quad \omega = \frac{2 \mathbf{k} V \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + i V \sqrt{a^2 - b^2}.$$

**3. Énergie cinétique du fluide dans le mouvement acyclique.** — En désignant par  $\mathcal{E}$  l'énergie cinétique du mouvement absolu acyclique plan considéré, par  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  le potentiel de vitesse et la fonction de courant de ce mouvement, on a

$$(1) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho \int_L \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = \frac{1}{2} \rho \int_L \varphi_1 d\psi_1.$$

L'intégrale est prise tout le long du contour L de la section du cylindre dans le sens direct, c'est-à-dire qu'en décrivant le contour, on laisse à gauche le domaine occupé par le fluide.

En désignant, comme nous l'avons fait dans les paragraphes précédents par  $\varphi$  et  $\psi$  le potentiel de vitesse et la fonction de courant dans le mouvement relatif, on a

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi + Vx, \\ \psi_1 = \psi + Vy. \end{cases}$$

Sur le contour L

$$\psi = \psi_0 = \text{const.},$$

et, par conséquent,

$$(3) \quad d\psi_1 = V dy.$$

En substituant les valeurs (2) et (3) dans l'expression (1), on peut écrire

$$(4) \quad T = \frac{1}{2} \rho V \int_L \varphi dy + \frac{1}{2} \rho V^2 \int_L x dy = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[ \frac{1}{V} \int_L \varphi dy - \pi b^2 \right].$$

D'après la formule (13) de la page 118, on a, sur la circonférence L,

$$(5) \quad \varphi = \frac{2K\psi_0}{\pi} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Exprimons les coordonnées d'un point P de la circonférence L en fonction d'un angle  $\beta$  défini comme suit. Posons

$$(6) \quad \frac{r}{r_1} \frac{z + i\sqrt{a^2 - b^2}}{z - i\sqrt{a^2 - b^2}} = e^{i\beta}.$$

On a alors en raison des équations (9) et (7) du paragraphe précédent

$$(7) \quad u = \frac{K\beta}{\pi},$$

et, en égalant les parties réelles et imaginaires de l'équation (6)

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2 - a^2 + b^2}{x^2 + (y - \sqrt{a^2 - b^2})^2} \frac{r}{r_1} &= \cos \beta, \\ \frac{2nx}{x^2 + (y - \sqrt{a^2 - b^2})^2} \frac{r_1}{r} &= \sin \beta. \end{aligned}$$

Transformons ces deux dernières expressions en tenant compte de l'équation de la circonférence L

$$x^2 + (y - a)^2 = b^2$$

et de la relation [(7), page 115]

$$\frac{r}{r_1} = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = q.$$

Nous obtenons

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= b \sqrt{a^2 - b^2} \frac{\sin \beta}{a - b \cos \beta}, \\ y &= \frac{a^2 - b^2}{a - b \cos \beta}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait varier  $\beta$  de 0 à  $2\pi$ , le point P décrit la circonférence L dans le sens direct. A la valeur du paramètre  $\beta = 0$  corres-

pond le point C ( $x = 0, y = a + b$ ) de la figure 1 du Tableau I et à la valeur  $\beta = \pi$  le point B ( $x = 0, y = a - b$ ).

En substituant les expressions obtenues dans l'équation (4), on a

$$(9) \quad T = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[ \frac{2 b (a^2 - b^2)^3 k}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Theta' \left( \frac{K\beta}{\pi} \right)}{\Theta \left( \frac{K\beta}{\pi} \right)} \frac{\sin \beta d\beta}{(a - b \cos \beta)^2} - \pi b^2 \right]$$

En remarquant que (1)

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{d}{du} \log \Theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 q^{2n+1} \frac{\pi}{K} \sin \frac{u \pi}{K}}{1 - 2 q^{2n+1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2(2n+1)}}$$

on peut transformer l'expression (9) comme suit

$$(10) \quad T = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[ 4 b (a^2 - b^2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{q^{2n+1} \sin^2 \beta d\beta}{(1 - 2 q^{2n+1} \cos \beta + q^{2(2n+1)}) (a - b \cos \beta)^2} - \pi b^2 \right].$$

Calculons l'intégrale

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \beta d\beta}{(p - s \cos \beta) (a - b \cos \beta)^2} = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \beta d\beta}{(p - s \cos \beta) (a - b \cos \beta)^2},$$

où nous posons

$$(11) \quad \begin{cases} p = 1 + q^{2(2n+1)}, \\ s = 2 q^{2n+1}. \end{cases}$$

En faisant le changement de variables

$$\tan \frac{\beta}{2} = t,$$

nous ramènerons l'intégrale  $I_n$  à l'intégrale

$$I_n = \frac{16}{(p + s)(a + b)^2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2 + A)(t^2 + B)^2},$$

(1) P. APPELL et E. LACOUR, *loc cit*, p. 120.

où les coefficients A et B ont les valeurs

$$(12) \quad \begin{cases} A = \frac{p-s}{p+s}, \\ B = \frac{a-b}{a+b}. \end{cases}$$

En décomposant la fraction rationnelle qui figure sous le signe  $\int$  en fractions simples, on a

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{(t^2+A)(t^2+B)^2} = & -\frac{A}{(B-A)^2} \frac{1}{t^2+A} \\ & + \frac{A}{(B-A)^2} \frac{1}{t^2+B} + \frac{B}{B-A} \frac{1}{(t^2+B)^2} \end{aligned}$$

et, en effectuant l'intégration, on obtient

$$I_n = \frac{4\pi}{(p+s)(a+b)^2(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2\sqrt{B}}.$$

Il nous reste à éliminer A, B, p, s au moyen des expressions (11) et (12) et en tenant compte de la relation (7'), pour obtenir l'intégrale  $I_n$  sous sa forme définitive :

$$I_n = \frac{2\pi q}{b\sqrt{a^2-b^2}(1-q^{2n+2})^2}.$$

En raison de ce résultat, l'expression (10) de l'énergie cinétique du fluide peut être transformée comme suit

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \rho \pi b^2 V^2 \left[ \frac{8(a^2-b^2)}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+2}}{(1-q^{2n+2})^2} - 1 \right].$$

En remarquant que

$$\frac{4(a^2-b^2)}{b^2} = \frac{(1-q^2)^2}{q^2},$$

on peut écrire

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \rho \pi b^2 V^2 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q - q^{-1}}{q^{n+1} - q^{-n-1}} \right)^2 \right]$$

ou, en posant

$$\frac{q - q^{-1}}{q^{n+1} - q^{-n-1}} = \frac{\text{sh } \log q}{\text{sh } (n+1) \log q},$$

on a aussi

$$\bar{\epsilon} = \left( \frac{1}{2} \rho \pi b^2 V^2 \right)^{1/2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{sh} \log q}{\operatorname{sh}(n+1) \log q} \right]^2 \right).$$

Lorsque  $\frac{a-b}{b}$  tend vers l'infini ou vers zéro, c'est-à-dire lorsque le cylindre s'éloigne ou s'approche indéfiniment de la paroi plane,  $q$  tend respectivement vers zéro ou vers l'unité. Dans le premier cas, la valeur limite de  $\bar{\epsilon}$  est

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho \pi b^2 V^2.$$

Pour calculer la valeur limite de  $\bar{\epsilon}$  pour  $q \rightarrow 1$ , remarquons que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sh} \log q}{\operatorname{sh}(n+1) \log q} = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

La valeur limite de  $\bar{\epsilon}$ , lorsque le corps se rapproche indéfiniment de la paroi plane, s'exprime, par conséquent, comme suit

$$\bar{\epsilon} = \frac{\pi^2 - 3}{6} \rho \pi b^2 V^2 = 2,29 \left( \frac{1}{2} \rho \pi b^2 V^2 \right).$$

Si nous considérons simultanément deux cylindres ronds, disposés symétriquement par rapport à la paroi plane, il faudra doubler la valeur de l'énergie cinétique. Supposons que les deux cylindres se rapprochent indéfiniment de la paroi et, par conséquent, l'un de l'autre. Traçons une circonférence  $L_1$  de rayon  $2b$  tangente aux deux circonférences  $L$  de rayon  $b$ . L'énergie cinétique d'un mouvement fluide irrotationnel contournant la circonférence de rayon  $2b$  est

$$\bar{\epsilon}_1 = 4 \left( \frac{1}{2} \rho \pi b^2 V^2 \right).$$

En ajoutant à  $T_1$  l'énergie cinétique

$$\bar{\epsilon}_0 = 2 \left( \frac{1}{2} \rho \pi b^2 V^2 \right)$$

du fluide compris entre la circonférence  $L_1$  et les deux circonférences  $L$  et se mouvant avec la vitesse uniforme  $V$ , on trouve que

$$6\left(\frac{1}{2}\rho\pi b^2 V^2\right) > 4,58\left(\frac{1}{2}\rho\pi b^2 V^2\right),$$

conformément au théorème que nous avons démontré dans notre travail : *Recherches d'Hydrodynamique*.

4. *Expression du potentiel des vitesses et de l'énergie cinétique du mouvement cyclique.* — Pour exprimer la relation de dépendance entre les variables  $\omega (= \varphi + i\psi)$  et  $z (= x + iy)$  dans le cas où le fluide circule autour d'un cylindre rond immobile de rayon  $b$ , disposé à une distance  $a$  d'une paroi plane  $S_0$ , on peut utiliser les plans  $z$ ,  $t$ , et  $t'$  de la planche I; quant au plan  $\omega$ , qui correspond au problème considéré, il est donné par la figure ci-dessous.

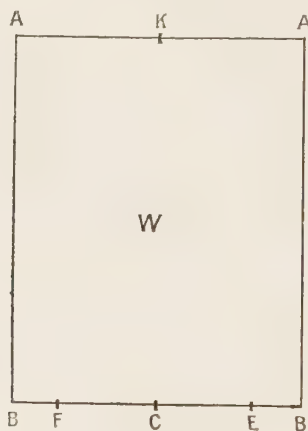


Fig. 2.

Les points qui se correspondent sont indiqués sur les quatre plans par les mêmes lettres.

Nous représenterons d'une façon conforme le plan  $z$  sur le plan de la variable auxiliaire  $t$ , en utilisant la formule (9) de la page 116.

$$(1) \quad u = -\frac{iK}{\pi} \log \frac{z + i\sqrt{a^2 - b^2}}{z - i\sqrt{a^2 - b^2}} + iK'.$$

Pour représenter d'une façon conforme le plan  $w$  sur le plan  $z$ , on a, en appliquant la méthode de Schwarz et Christoffel,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{M}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

et, en effectuant l'intégration,

$$(2) \quad w = M \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + N = Mu + N.$$

En éliminant  $u$  des expressions (1) et (2), on peut écrire

$$w = -\frac{iKM}{\pi} \log \frac{z + i\sqrt{a^2 - b^2}}{z - i\sqrt{a^2 - b^2}} + \left( i\frac{K'}{K} KM + N \right),$$

où, d'après la formule (7) de la page 115

$$\frac{K'}{K} = -\frac{1}{\pi} \log \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} = -\frac{1}{\pi} \log q.$$

On déterminera les constantes  $KM$  et  $N$  en admettant qu'au point C (voir la figure 1 de la planche I), dont l'affixe est  $z = i(a + b)$ , on a  $w = 0$ , et au point B, dont l'affixe est  $z = i(a - b)$ , on a  $w = \frac{z}{2}$ , où  $z$  est la circulation. On obtient ainsi

$$KM = \frac{z}{2}, \quad N = 0,$$

et, par conséquent,

$$(3) \quad w = -\frac{iz}{2\pi} \log \frac{z + i\sqrt{a^2 - b^2}}{z - i\sqrt{a^2 - b^2}} + i\frac{z}{2} \frac{K'}{K}$$

ou, en raison de l'équation (1),

$$(4) \quad w = \frac{z}{2} \frac{u}{K}.$$

En désignant par  $\psi$ , le flux à travers la coupure BA (fig. 1, Pl. I) et en remarquant qu'au point A,  $w = \frac{z}{2} + i\psi$ ,  $z = 0$ , on trouve, en

substituant ces valeurs dans l'équation (3),

$$\psi_1 = \frac{z}{2} \frac{K'}{K} = -\frac{z}{2\pi} \log q.$$

L'énergie cinétique du fluide, dans le mouvement cyclique, sera, par conséquent, en raison de l'équation (7) de la page 86,

$$\mathfrak{K} = -\frac{\rho z^2}{4\pi} \log q.$$

5. *Résultante des pressions hydrodynamiques sur le cylindre.* — En superposant les mouvements cycliques et acycliques, on obtient, d'après l'équation (16) de la page 119 et de l'équation (4) de la page 125, la relation suivante entre les variables  $\wp (= \varphi + i\psi)$  et  $z (= x + iy)$

$$\wp = \frac{2K\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + i\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{zu}{2K}.$$

Nous avons obtenu plus haut les expressions suivantes :

$$(1) \quad \zeta = \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \rho \pi b^2 \sqrt{2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\text{sh } \log q}{\text{sh}(n+1) \log q} \right]^2 \right\},$$

$$(3) \quad \mathfrak{K} = -\frac{\rho z^2}{4\pi} \log q,$$

où  $\mathfrak{K}$  exprime le flux à travers la coupure AB,  $\mathfrak{E}$  l'énergie cinétique du fluide dans le mouvement acyclique,  $\mathfrak{K}$  l'énergie cinétique du fluide dans le mouvement cyclique et

$$(4) \quad q = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Pour calculer la résultante des pressions hydrodynamiques sur le cylindre, il faut substituer ces valeurs dans l'équation générale (1) de la page 113,

$$Y = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial a} + \rho z \frac{\partial \zeta}{\partial a}.$$

Calculons d'abord le terme  $\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a}$  en le désignant par  $Y_1$ . En dérivant l'équation (2), en tenant compte de la relation (4) et en remarquant que

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \log q &= \frac{q^2 - 1}{2q} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \\ \frac{dq}{da} &= -\frac{q}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$(6) \quad Y_1 = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial a} = -\rho_2 \pi b V^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \operatorname{sh}(\log q) \operatorname{ch}[(n+1) \log q] - \operatorname{ch}(\log q) \operatorname{sh}[(n+1) \log q]}{\operatorname{sh}^3[(n+1) \log q]}.$$

Pour calculer les valeurs limites de  $Y_1$  lorsque  $q \rightarrow 0$  et  $q \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire lorsque le cylindre s'éloigne ou se rapproche indéfiniment de la paroi plane, remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}[(n+1) \log q] &= (n+1) \operatorname{sh}(\log q) \operatorname{ch}^n(\log q) \\ &\quad + \binom{n+1}{3} \operatorname{sh}^3(\log q) \operatorname{ch}^{n-2}(\log q) \\ &\quad + \binom{n+1}{5} \operatorname{sh}^5(\log q) \operatorname{ch}^{n-4}(\log q) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}[(n+1) \log q] &= \operatorname{ch}^{n+1}(\log q) + \binom{n+1}{2} \operatorname{sh}^2(\log q) \operatorname{ch}^{n-1}(\log q) \\ &\quad + \binom{n+1}{4} \operatorname{sh}^4(\log q) \operatorname{ch}^{n-3}(\log q) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$(n+1) \binom{n+1}{r} - \binom{n+1}{r+1} = r \binom{n+2}{r+1},$$

où l'on exprime par  $\binom{n}{r}$  les coefficients binomiaux

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r}.$$

En raison de ces relations on peut transformer l'équation (6)

comme suit

$$Y_1 = -\rho^2 \pi b V^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^{2n+1}(\log q)} \\ \times \frac{{}_2\left(\begin{smallmatrix} n+2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + 4\left(\begin{smallmatrix} n+2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \operatorname{th}^2(\log q) + 6\left(\begin{smallmatrix} n+2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) \operatorname{th}^4(\log q) + \dots}{\left[\left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \operatorname{th}^2(\log q) + \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \operatorname{th}^4(\log q) + \dots\right]^3}$$

ou, en posant

$$\operatorname{th}(\log q) = \sin \gamma,$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(\log q)} = \frac{2q}{q^2 + 1} = \cos \gamma,$$

on obtient

$$Y_1 = -\rho^2 \pi b V^2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos^{2n+1} \gamma \frac{{}_2\left(\begin{smallmatrix} n+2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + 4\left(\begin{smallmatrix} n+2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \sin^2 \gamma + 6\left(\begin{smallmatrix} n+2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) \sin^4 \gamma + \dots}{\left[\left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \sin^2 \gamma + \left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \sin^4 \gamma + \dots\right]^3}$$

et, en développant,

$$Y_1 = -\rho^2 \pi b V^2 \left[ \frac{1}{4} \cos^3 \gamma + \frac{8}{(3 + \sin^2 \gamma)^3} \cos^5 \gamma \right. \\ \left. + \frac{20 + 4 \sin^2 \gamma}{(4 + 4 \sin^2 \gamma)^3} \cos^7 \gamma + \frac{40 + 24 \sin^2 \gamma}{(5 + 10 \sin^2 \gamma + \sin^4 \gamma)^3} \cos^9 \gamma + \dots \right].$$

Pour les très petites valeurs de  $\gamma$ , on a approximativement

$$Y_1 = -\rho^2 \pi b V^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cos^{2n+1} \gamma.$$

A la valeur  $q = 0$  correspond la valeur  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , à la valeur  $q = 1$  la valeur  $\gamma = 0$  et l'on se rend facilement compte, en considérant les expressions que nous venons d'obtenir, que

$$\lim_{q \rightarrow 0} Y_1 = 0 \\ \lim_{q \rightarrow 1} Y_1 = -\infty.$$

Quelques valeurs de  $Y_1$  que nous avons calculées sont données

dans le Tableau ci-dessous :

| $\frac{1}{q}$  | $\frac{a-b}{b}$ | $\frac{Y_1}{\rho_2 b V}$ |
|----------------|-----------------|--------------------------|
| 1.....         | 0               | — $\infty$               |
| 1, 1.....      | 0,005           | —14,22                   |
| 2.....         | 0,250           | —0,75                    |
| 4.....         | 1,125           | —0,09                    |
| 6.....         | 2,083           | —0,03                    |
| $\infty$ ..... | $\infty$        | 0                        |

La pression totale qu'éprouve le solide de la part du fluide est, en vertu des formules (1), (3), (4),

$$Y = Y_1 - \frac{\rho \kappa}{4\pi} \left( \frac{2 - 4\pi a V}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right),$$

$Y_1$  ayant pour valeur l'expression (6).

Il est intéressant de noter que la résultante des pressions hydrodynamiques qui attire le cylindre vers la paroi plane devient infinie lorsque le cylindre se rapproche indéfiniment de la paroi. En désignant par  $\bar{V}$  la vitesse moyenne du fluide à travers la coupure AB, on a d'après la formule (1)

$$\bar{V}(a-b) = V\sqrt{a^2 - b^2}$$

et, par conséquent,

$$\bar{V} = V\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

La vitesse  $\bar{V}$  devient infinie lorsque la distance  $(a-b)$  tend vers zéro.

Si l'on considère simultanément deux cercles disposés d'une façon symétrique par rapport à la paroi rectiligne et si on les rapproche indéfiniment l'un de l'autre, on ne parvient pas au cas d'un corps ayant la forme d'un 8 qui se meut orthogonalement à sa hauteur, car, dans ce dernier cas, la vitesse au point qui réunit les deux circonférences est nulle. On peut parvenir (1) à ce cas en étudiant le mou-

(1) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 218.

vement plan d'un fluide autour d'un corps, dont le contour est formé par deux arcs de cercle convexes, et qui se meut parallèlement à la corde commune de ces arcs et en passant ensuite au cas limite où cette corde s'évanouit.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 27 mai 1922.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

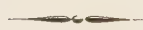
M. MOLLIARD

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 27 mai 1922.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. APPELL.



# TABLE DES MATIÈRES.

## PREMIÈRE PARTIE.

|                                                                                                                                                            | Pages |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| INTRODUCTION.....                                                                                                                                          | 1     |
| CHAPITRE I. — Théorème de l'énergie cinétique minima.....                                                                                                  | 4     |
| CHAPITRE II. — Sur la résistance d'un plan mince.....                                                                                                      | 12    |
| CHAPITRE III. — Inertie additive dans les mouvements avec et sans glissements...                                                                           | 26    |
| CHAPITRE IV. — Mouvement d'un liquide autour de deux plans minces dans le<br>cas où deux tourbillons de rotations opposées sont disposés<br>entre eux..... | 32    |
| CHAPITRE V. — Mouvement initial d'un liquide en contact avec un corps solide à<br>arêtes vives.....                                                        | 42    |
| CONCLUSION.....                                                                                                                                            | 51    |

## SECONDE PARTIE.

|                   |    |
|-------------------|----|
| INTRODUCTION..... | 53 |
|-------------------|----|

### CHAPITRE I. — *Équations du mouvement d'un fluide rapportées à des axes mobiles.*

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| 1. Vitesses et accélérations.....                              | 56 |
| 2. Transformation des équations du mouvement de Helmholtz..... | 59 |
| 3. Équation de continuité.....                                 | 60 |
| 4. Tourbillons et circulations.....                            | 60 |
| 5. Transformation des formules de H. Lamb et de Beltrami.....  | 64 |
| 6. Équation de pression.....                                   | 67 |
| 7. Théorème de Bernoulli dans le mouvement relatif.....        | 69 |
| 8. Sur un théorème de cinématique.....                         | 70 |

CHAPITRE II. — *Sur la résistance des fluides visqueux incompressibles.*

|                                                                                  | Pages. |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1. Théorème des projections des quantités de mouvement.....                      | 74     |
| 2. Théorème des moments des quantités de mouvement.....                          | 79     |
| 3. Expression de la puissance. Cas d'un fluide réel à très petit frottement..... | 81     |

CHAPITRE III. — *Équations générales du mouvement de corps solides dans un fluide parfait incompressible.*

|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Généralisation de Kelvin du théorème d'Ostrogradski ou de Green.....                                                           | 83  |
| 2. Théorème de Joukowski.....                                                                                                     | 87  |
| 3. Remarques préliminaires sur le problème du mouvement de $n$ corps solides dans un liquide parfait incompressible.....          | 88  |
| 4. Expression du potentiel des vitesses.....                                                                                      | 90  |
| 5. Calcul des projections sur les axes de coordonnées des résultantes des pressions hydrodynamiques agissant sur les solides..... | 93  |
| 6. Calcul des moments des pressions hydrodynamiques agissant sur les corps...                                                     | 103 |
| 7. Équation des forces vives.....                                                                                                 | 106 |
| 8. Forme générale des équations du mouvement.....                                                                                 | 110 |

CHAPITRE IV. — *Mouvement cyclique plan d'un liquide autour d'un solide qui se meut parallèlement à une paroi rectiligne.*

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Force et couple résultants agissant sur un cylindre.....                                  | 111 |
| 2. Cas d'un cylindre rond. Calcul du potentiel des vitesses du mouvement acyclique.....      | 112 |
| 3. Énergie cinétique du fluide dans le mouvement acyclique.....                              | 119 |
| 4. Expression du potentiel des vitesses et de l'énergie cinétique du mouvement cyclique..... | 121 |
| 5. Résultante des pressions hydrodynamiques sur le cylindre.....                             | 126 |







---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>,  
67961 Quai des Grands-Augustins, 55.

---